

Statystyka i modelowanie w naukach o środowisku

Wykład 3

Testowanie hipotez

Jednoczynnikowa analiza wariancji ANOVA

Jednoczynnikowa analiza wariancji

Do weryfikacji hipotez o wartości średniej μ dla dwóch populacji o rozkładach normalnych używany był test t-Studenta.

Gdy porównywanych populacji jest więcej używa się testu ANOVA (analizy wariancji).

Metodę rozwinął angielski biolog R. A. Fisher (1925r.).

Nazwa bierze się stąd, że ocena istotności różnic między średnimi odbywa się przez porównanie wariancji, czyli sumy kwadratów odchyleń wszystkich pomiarów od średniej. Całkowita zmienność to zmienność losowa i zmienność spowodowana efektami występującymi w badaniu. Efekty te nazywa się także czynnikami grupującymi. Jeśli czynnik jest jeden używa się jednoczynnikowej analizy wariancji. Czynnik może mieć wiele poziomów tzw. poziomów czynnika.

Model liniowy w jednoczynnikowej analizie wariancji

Każdą obserwację można opisać w następujący sposób:

$$y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$$

y_{ij} - oznacza j-tą obserwację z i-tego poziomu czynnika,

μ - średnia wartość cechy w populacji,

a_i - efekt i-tego poziomu czynnika, natomiast

e_{ij} - błąd statystyczny (naturalny rozrzut danych)

Suma kwadratów wariancji całkowitej dla wszystkich wyników obserwacji jest rozbita na sumę kwadratów opisującą zmienność wewnątrz prób i sumę kwadratów opisującą zmienność między grupami (populacjami).

całkowita suma kwadratów (SS_c) = międzygrupowa suma kwadratów (SS_e) +
wewnątrzgrupowa suma kwadratów (SS_b)

**Modele liniowe mogą być rozbudowane o dalsze czynniki doświadczalne oraz o interakcję tych czynników. W zależności od tego czy rozpatrywane efekty są losowe czy stałe model nazywa się modelem losowym, stałym lub mieszanym.

Jednoczynnikowa analiza wariancji

Jeśli czynnik grupujący ma a poziomów, hipoteza zerowa w analizie wariancji ma postać:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_a$$

H_1 : co najmniej dwie średnie różnią się między sobą

Test F w analizie wariacji

Wynikiem analizy jest poniższa tabela:

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Stopnie swobody	Średni kwadrat	Test F
Efekt	SK_e	$a-1$	$SK_e/(a-1)$	$F = \frac{SK_e/(a-1)}{SK_b/(n-a)}$
Błąd	SK_b	$n-a$	$SK_b/(n-a)$	
Całkowita	SK_c	$n-1$		

a - liczba poziomów czynnika

n - liczba wszystkich obserwacji (liczba wszystkich danych)

Test F w analizie wariacji

Następnie należy odczytać z tablic wartość statystyki $F_{\alpha, a-1, n-a}$ i porównać ją z F.

Jeżeli $F > F_{\alpha, a-1, n-a}$ to istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej, w przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Jeżeli dla otrzymanego F, $p < \alpha$ to również istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej.

ANOVA jednoczynnikowa - przykłady

Czynnik przyczyna kontrolowana	Skutek losowa zmienna zależna
Odmiana grochu siewnego	Plon, długość korzenia, zawartość białka
Odmiana żmij	Długość ciała
Dawka leku na nadciśnienie	Ciśnienie pacjenta
Suplement diety	Waga pacjenta
Odległość od elektrowni	Zawartość metalu ciężkiego w glebie

ANOVA - przykład

Przedmiotem i celem szerokich badań było poznanie uwarunkowania rozwoju grzyba *Botrytis cinerea* L. przez czynniki biotyczne i abiotyczne. Ten grzyb jest patogenem szarej pleśni roślin. W jednoczynnikowym doświadczeniu laboratoryjnym badano wpływ preparatu chemicznego (czynnik A) na średnicę rozwiniętej kolonii grzyba *Botrytis cinerea* L. Wybrano pięć różnych preparatów chemicznych (A_i , $i=1,2,3,4,a=5$), jako potencjalne substancje czynne środków ochrony roślin. Ze względu na jednorodne warunki doświadczalne w laboratorium, postanowiono zaplanować (założyć) doświadczenie na szalkach Petriego z agarem w układzie całkowicie losowym w pięciu powtórzeniach. Przygotowano 25 takich samych szalek Petriego z pożywką agarową. Na wszystkie szalki nałożono jednakową porcję zawiesiny zarodników grzyba i rozmieszczono je w pomieszczeniu laboratoryjnym o wyrównanych warunkach termicznych i świetlnych (warunkach jednorodnych, tj. bez ich zmienności systematycznej). Każdy z preparatów chemicznych zastosowano na losowo wybranych 5 szalkach. Zatem, doświadczenie zostało zaplanowane w układzie całkowicie losowym. Po pewnym czasie na wszystkich szalkach zmierzono średnicę rozwiniętej kolonii grzyba.

ANOVA jednoczynnikowa - przykład

Układ całkowicie losowy (plan doświadczenia)

całkowicie losowe przyporządkowanie każdemu poziomowi czynnika n jednostek doświadczalnych

Powtórzenia	Preparaty				
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	1,00	1,66	2,59	2,62	2,62
2	1,21	1,90	2,46	2,90	2,31
3	1,02	1,68	2,70	3,04	2,76
4	1,10	1,82	2,60	3,42	2,84
5	1,30	1,76	2,42	3,11	2,40

ANOVA jednoczynnikowa - przykład

Układ całkowicie losowy (plan doświadczenia)

całkowicie losowe przyporządkowanie każdemu poziomowi czynnika n jednostek doświadczalnych

czyli

warunki przebiegu zjawiska na wszystkich jednostkach doświadczalnych są jednorodne, tzn. są zmienne tylko czysto losowo (zmiennność fluktuacyjna)

ANOVA jednoczynnikowa - przykład

Układ całkowicie losowy (plan doświadczenia)

całkowicie losowe przyporządkowanie każdemu poziomowi czynnika n jednostek doświadczalnych

A_1	A_2	A_2	A_5	A_2
A_5	A_5	A_1	A_4	A_3
A_2	A_3	A_3	A_2	A_4
A_4	A_1	A_4	A_1	A_5
A_3	A_4	A_5	A_3	A_1

ANOVA jednoczynnikowa – przykład

charakterystyka statystyczna doświadczenia

Przedmiot badań	Rozwój grzyba <i>Botrytis cinerea</i> L.
Rodzaj doświadczenia	Laboratoryjne
Czynnik	Preparat chemiczny grzybobójczy
Poziomy czynnika (obiekty)	Badane preparaty
Liczba poziomów czynnika	5
Zmienna zależna	Średnica kolonii grzyba
Jednostka doświadczalna (powtórzenie)	Szalka z grzybnią
Liczba powtórzeń	5
Liczba jednostek w doświadczeniu	25
Warunki doświadczalne	Jednorodne
Układ doświadczalny	Całkowicie losowy

ANOVA jednoczynnikowa – przykład

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

(czyli preparat nie ma wpływu na wzrost grzyba lub preparaty działają tak samo na wzrost grzyba)

H_1 : działanie co najmniej dwóch preparatów jest inne od siebie

ANOVA jednoczynnikowa – przykład

Excel:

Analiza wariancji: jednoczynnikowa						
PODSUMOWANIE						
Grupy	Licznik	Suma	Średnia	Wariancja		
Kolumna 1	5	5.63	1.126	0.01628		
Kolumna 2	5	8.82	1.764	0.00988		
Kolumna 3	5	12.77	2.554	0.01288		
Kolumna 4	5	15.09	3.018	0.08572		
Kolumna 5	5	12.93	2.586	0.05168		
ANALIZA WARIANCJI						
Źródło wariancji	SS	df	MS	F	Wartość-p	Test F
Pomiędzy grupami	11.43274	4	2.858184	80.99592	4.6E-12	2.866081
W obrębie grup	0.70576	20	0.035288			
Razem	12.1385	24				

=ROZKŁAD.F.ODW(0.05;4;20)

$4.6 \cdot 10^{-12}$

ANOVA jednoczynnikowa – przykład

Statistica

statystyka → ANOVA → ANOVA jednoczynnikowa

następnie:

„zmienne”, zmienna zależna (druga kolumna)

czynnik jakościowy (pierwsza kolumna)

następnie:

„Wszystkie efekty”

czynnik	zmienna zależna
A ₁	1
A ₂	1.66
A ₃	2.59
A ₄	2.62
A ₅	2.62
A ₁	1.21
A ₂	1.9
A ₃	2.46
A ₄	2.9
A ₅	2.31
A ₁	1.02
A ₂	1.68
A ₃	2.7
A ₄	3.04
A ₅	2.76
A ₁	1.1
A ₂	1.82
A ₃	2.6
A ₄	3.42
A ₅	2.84
A ₁	1.3
A ₂	1.76
A ₃	2.42
A ₄	3.11
A ₅	2.4

ANOVA jednoczynnikowa – przykład

Tabela wynikowa:

Jednowymiarowe testy istotności dla Zmn2 (Arkusz1)					
Parametryzacja z sigma-ograniczeniami					
Dekompozycja efektywnych hipotez					
	SS	Stopnie swobody	MS	F	p
Efekt					
Wyraz wolny	122.0583	1	122.0583	3458.918	0.000000
Zmn1	11.4327	4	2.8582	80.996	0.000000
Błąd	0.7058	20	0.0353		

$p < \alpha$ nie ma podstaw do przyjęcia H_0

ANOVA jednoczynnikowa – przykład porównania szczegółowe

Po odrzuceniu H_0 można wyodrębnić grupy jednorodne, w których działanie preparatu było takie samo.

Procedury(metody) obiektywych	porównań	wielokrotnych	średnich
----------------------------------	----------	---------------	----------

1. Procedura t- Studenta
2. Procedura Duncana
3. Procedura Newmana-Keulsa
4. Procedura Tukeya

ANOVA jednoczynnikowa – przykład porównania szczegółowe

Statistica:

W panelu, gdzie wybrane było „Wszystkie efekty” na dole należy wybrać

„Więcej wyników”

a następnie „Post-hoc” i „Test Tukeya (HSD)”

The screenshot shows the 'Post-hoc' tab in the ANOVA dialog box of Statistica. The 'Efekt' (Effect) is set to 'Zmn1'. The 'Zmienne zależne' (Dependent variables) are 'Zmn2'. Under 'Pokaż' (Show), the 'Jednorodne grupy' (Homogeneous groups) option is selected with a significance level of .05. Under 'Błąd' (Error), the 'Błąd międzygrupowy' (Between-group error) option is selected. The 'MS' (Mean Square) is 0.000 and 'df' (degrees of freedom) is 0.00. The 'Testy dla rozstępów' (Tests for intervals) section includes 'Test Newman-Keulsa', 'Rozstępy kryt.' (Critical intervals), 'Duncana', and 'Rozstępy kryt.'. The 'Porównania z grupą kontrolną' (Comparisons with control group) section includes 'Test Dunnetta' and three radio buttons: '< kontrolna' (less than control), '> kontrolna' (greater than control), and '<> kontrolna' (not equal to control), with the last one selected. The 'Nr komórki dla grupy kontrolnej' (Number of cells for control group) is set to 1.

Podsumowanie | Średnie | Por. zaplanowane | **Post-hoc** | Założenia

Efekt: "Zmn1" ▼

Zmienne zależne: Zmn2

Pokaż

- ☐ Istotne różnice
- ☒ Jednorodne grupy: .05
- ☐ Przedziały ufności
- ☐ Rozstępy kryt.: .05

Błąd

- ☒ Błąd międzygrupowy
- ☐ Błąd powt. pomiarów
- ☐ Międzygrup.; powt. pomiarów; połącz.
- ☐ MS: 0.000 df: 0.00

Test N I R Fishera | Test B onferroniego | Test S cheffé

Test T ukeya (HSD) | Test T ukeya dla różnych N

Testy dla rozstępów

Test N ewmana-Keulsa | Rozstępy kryt. | Duncana | Rozstępy kryt.

Porównania z grupą kontrolną

Test D unnetta | < kontrolna | > kontrolna | ☒ <> kontrolna

Nr komórki dla grupy kontrolnej: 1

ANOVA jednoczynnikowa – przykład porównania szczegółowe

Średnie średnice rozwiniętej kolonii grzyba dla preparatów uporządkowane są od najniższej do najwyższej (od A1 do A4).

Wyodrębnione zostały cztery grupy jednorodne (kolumny 1, 2, 3 i 4)
grupa 1 – A3 i A5 (średnie 2,55 i 2,59 cm)
grupa 2 – A1 (średnia 1,13 cm)
grupa 3 – A2 (średnia 1,76 cm)
grupa 4 – A4 (średnia 3,02 cm)

Statistica - [Skoroszyt1* - Test HSD Tukeya; zmienna Zmn2]

Plik	Podstawowe	Edycja	Widok	Format	Statystyka	Data Minir
Statystyki podstawowe	Regresja wieloraka	ANOVA	Nieparametryczne	Dopasowanie rozkładu	Rozkłady i symulacja	Modele za Wielowym Analiza mc Zaawa

Skoroszyt1*

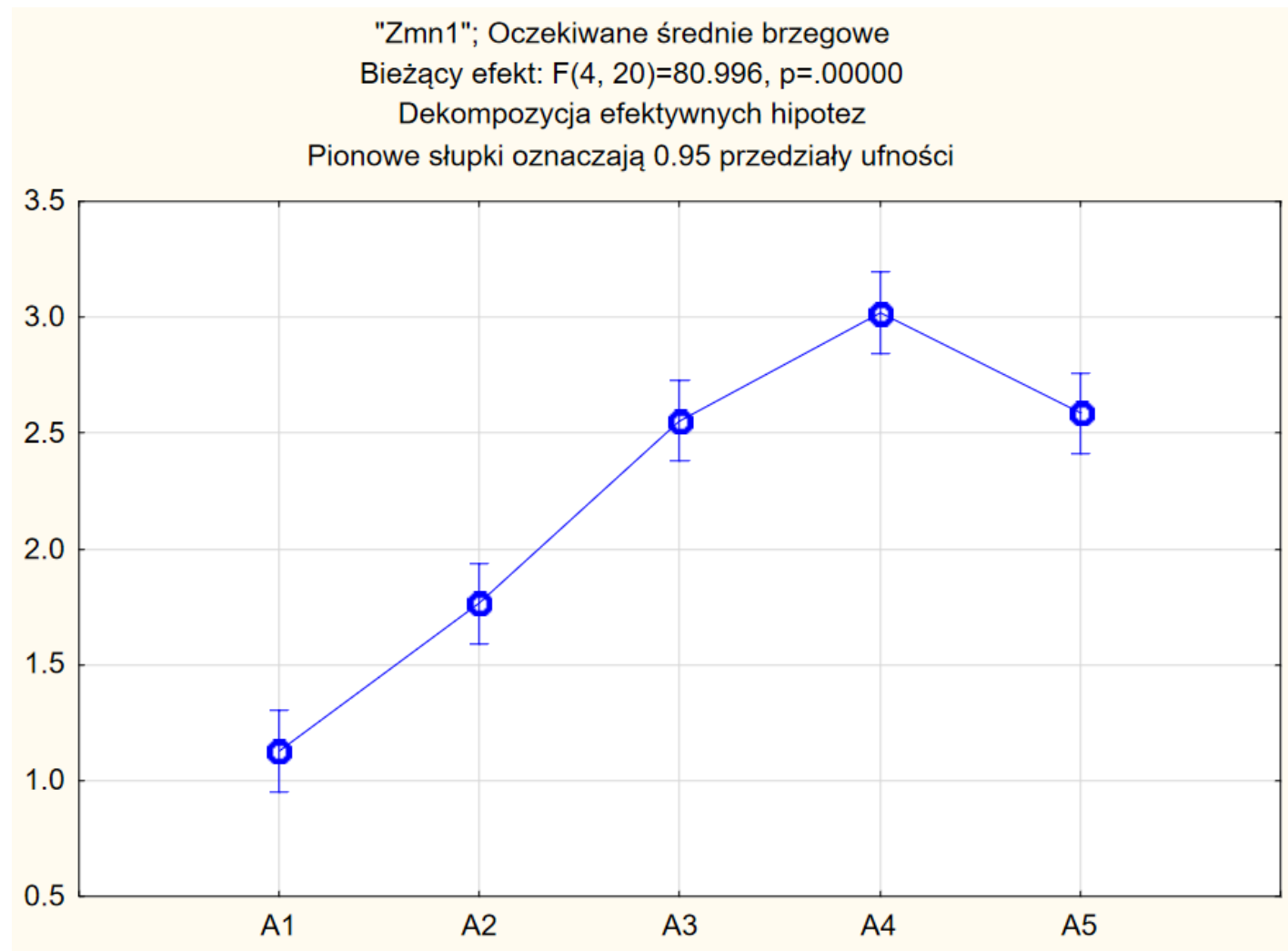
- ANOVA (Arku
- ANOVA - W
- Jednowy
- Test HSD
- Test HSD

Test HSD Tukeya; zmienna Zmn2 (Arkusz1)
Grupy jednorodne, alfa = .05000
Błąd: MS międzygrupowe = .03529, df = 20.000

Nr podkl.	Zmn1	Zmn2 Średnie	1	2	3	4
1	A1	1.126000		****		
2	A2	1.764000			****	
3	A3	2.554000	****			
5	A5	2.586000	****			
4	A4	3.018000				****

ANOVA jednoczynnikowa – przykład porównania szczegółowe

Pionowe słupki to PU dla średniej. Jeśli się nakładają (np. A3 i A5) nie ma między średnimi statystycznie istotnej różnicy.



Co jeśli nie jest spełnione założenie o normalności rozkładów danych?

Test nieparametryczny Kruskala –Wallisa.

Statystyką testową jest wartość K (oznaczana również jako H)

Wartość K jest tym większa im jest większa różnica między rangami dla badanych grup.

Podobnie jak w przypadku testu U Manna-Whitneya rangi poszczególnym wartościom obserwacji są nadawane po uporządkowaniu w kolejności rosnącej wartości z wszystkich badanych prób.

Jeśli odrzucimy hipotezę zerową w teście Kruskala-Wallisa (czyli jeśli p dla testu będzie mniejsze od wartości α) to stwierdzamy, że co najmniej dwie populacje różnią się pod względem rozkładów badanej cechy.

Porównania wielokrotne wykonuje się dla wszystkich możliwych par badanych populacji.

Test nieparametryczny Kruskala –Wallisa

W celu sprawdzenia, czy różne cztery metody leczenia schorzenia dają takie same rezultaty pobrano 10-elementowe próby losowe spośród osób, które podlegały leczeniu odpowiednio metodą I, II, III i IV. Wyniki badania podano w umownej skali.

I	II	III	IV
38	56	44	44
39	48	49	45
48	47	40	48
31	54	40	53
43	50	49	52
37	55	45	43
38	48	48	44
47	46	41	49
33	53	39	52
44	49	50	50

Test nieparametryczny Kruskala –Wallisa

<https://www.socscistatistics.com/tests/kruskal/default.aspx>

lub Statistica (dane muszą być sformatowane do dwóch kolumn)

Statystyka → testy nieparametryczne →
porównanie wielu prób niezależnych (grup)

jeśli p dla testu będzie mniejsze od wartości α , to
co najmniej dwie populacje różnią się pod
względem rozkładów badanej cechy

metoda	ocena
I	38
II	56
III	44
IV	44
I	39
II	48
III	49
IV	45
I	48
II	47
III	40
IV	48
I	31
II	54
III	40
IV	53
I	43
II	50
III	49
IV	52
I	37
II	55
III	45
IV	43
I	38
II	48
III	48