Statystyka i modelowanie w naukach o środowisku

Wykład 4

Testowanie hipotez

Testowanie hipotez

- Hipoteza statystyczna to dowolne przypuszczenie odnośnie rozkładu populacji generalnej tj. jego postaci funkcyjnej lub wartości parametrów.
- Przypuszczenie to testuje się na podstawie wyników próby losowej.
- Hipotezy komplementarne to hipoteza zerowa H_0 i hipoteza alternatywna H_1.

Test statystyczny

Reguła postępowania, według której każdej możliwej próbie losowej przyporządkowuje się decyzję odrzucenia lub nieodrzucenia hipotezy H_0.

Testowanie hipotez

Testy parametryczne - sformułowane przypuszczenie dotyczy wartości parametrów rozkładu

W pozostałych przypadkach - testy nieparametryczne.

Testy istotności

- Zbiór tych wartości próby, dla których H_0 jest odrzucana nazywamy zbiorem krytycznym lub obszarem krytycznym.
- Dopełnienie obszaru krytycznego nazywamy obszarem przyjęcia hipotezy zerowej.

Testowanie hipotez

	H_0 is true	H_1 is true
Accept Null Hypothesis	Right decision	Wrong decision Type II Error
Reject Null Hypothesis	Wrong decision Type I Error	Right decision

Moc testu

Moc testu to prawdopodobieństwo niepopełnienia błędu drugiego rodzaju, czyli odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej, wynoszącym 1-β.

Test statystyczny może być słaby lub mocny:

- test mocny - w większości przypadków jesteśmy w stanie odrzucić fałszywą hipotezę zerową
- test słaby - istnieje duża szansa na to, że nie odrzucimy hipotezy zerowej, pomimo jej nieprawdziwości.

Moc testu

Test mocny:

- prezentuje mały błąd II rodzaju (β),
- łatwiej odrzuca hipotezę zerową H_0,
- rzadko myli się odrzucając H_0 (raczej nie odrzuca H_0 prawdziwej),
- jeśli odrzuca H_0 to jest wysoka szansa (równa mocy testu), że H_0 była fałszywa.

Moc testu

Zazwyczaj testy parametryczne określane są jako testy statystyczne o większej mocy w porównaniu do ich nieparametrycznych odpowiedników, dlatego też jeżeli tylko założenia pozwalają, to z dwóch testów: parametryczny vs nieparametryczny wybieramy testy parametryczne.

Moc testu

Moc testu uzależniona jest od przyjętego poziomu istotności. Moglibyśmy powiedzieć, że zawężenie przyjętego poziomu istotności z wartości 0,05 do wartości np. 0,01 pozwoli nam podjąć właściwszą decyzję, przyjmując bądź odrzucając daną hipotezę. Niestety, ale taki zabieg powoduje zwiększenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju. Jeżeli zwiększamy prawdopodobieństwo popełnienia danego błędu jednocześnie zmniejszamy je dla drugiego.

Moc testu

Moc testu uzależniona jest również od liczby obserwacji w badaniu. Im nasza próba jest liczniejsza tym test ma większą moc - mniejsza szansa popełnienia błędu.

Test normalności

test Shapiro-Wilka - standardowy test wykorzystywany do testowania normalności danych

przykład:

sprawdzamy czy próba $x_1, \ldots, x_n$ pochodzi z rozkładu normalnego

Hipoteza zerowa i alternatywna w teście Shapiro-Wilka ma następującą postać:

H_0: Próba pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym
H_1: Próba nie pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym

W celu przeprowadzenia testu wykorzystuje się statystykę W.

Test normalności - przykład

Badano zawartość witaminy C w soku pomidorowym przygotowanym według wybranej receptury. Pomiary zawartości witaminy C w 17 próbkach dały wyniki (mg/100g): 18,8 18,2 16,5 20,5 20,0 20,2 14,6 26,9 25,0 22,3 20,9 22,1 23,1 13,6 21,4 14,8 17,9.

Sprawdź, czy dane w próbie pochodzą z rozkładu normalnego.

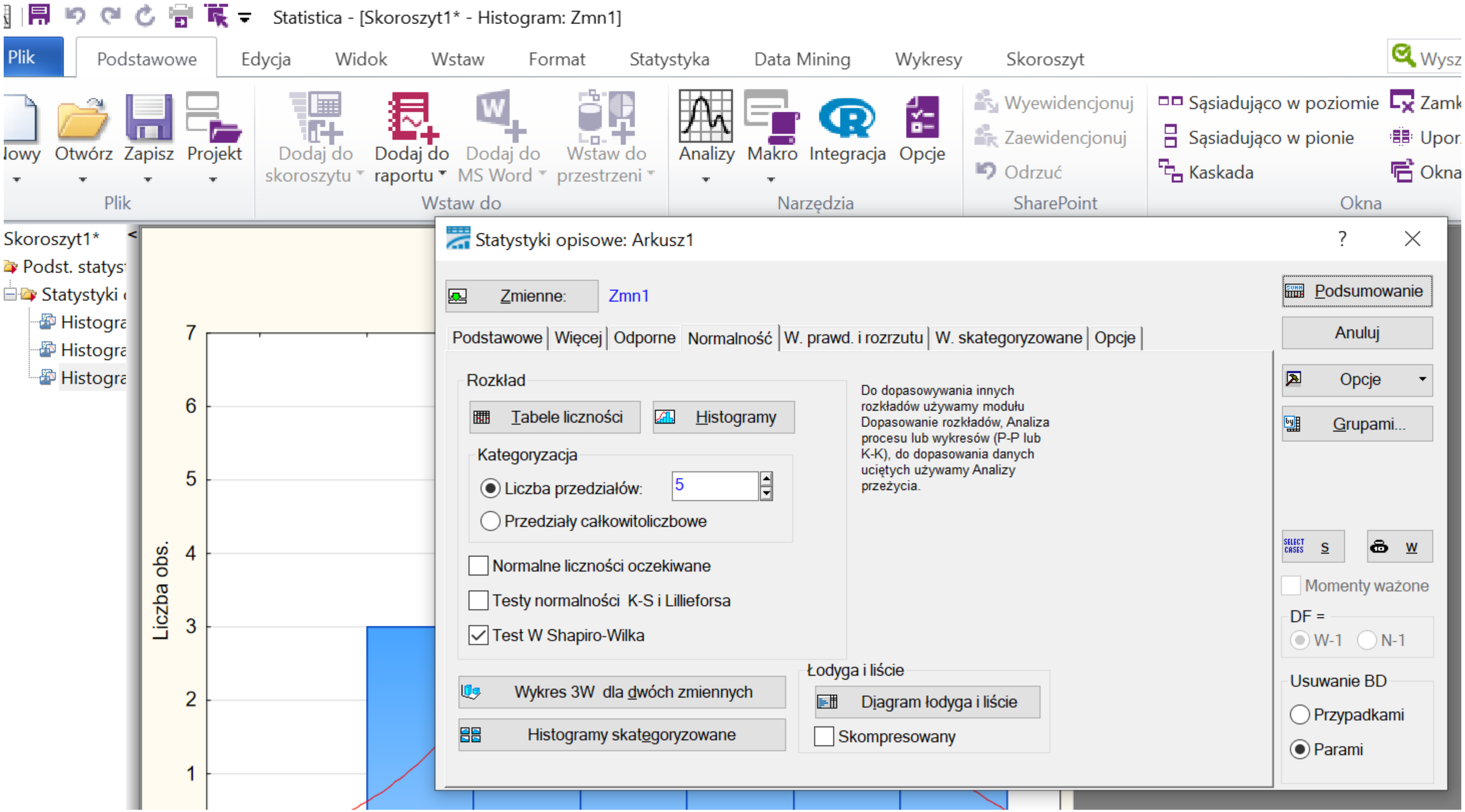
Test normalności - przykład

Statistica:

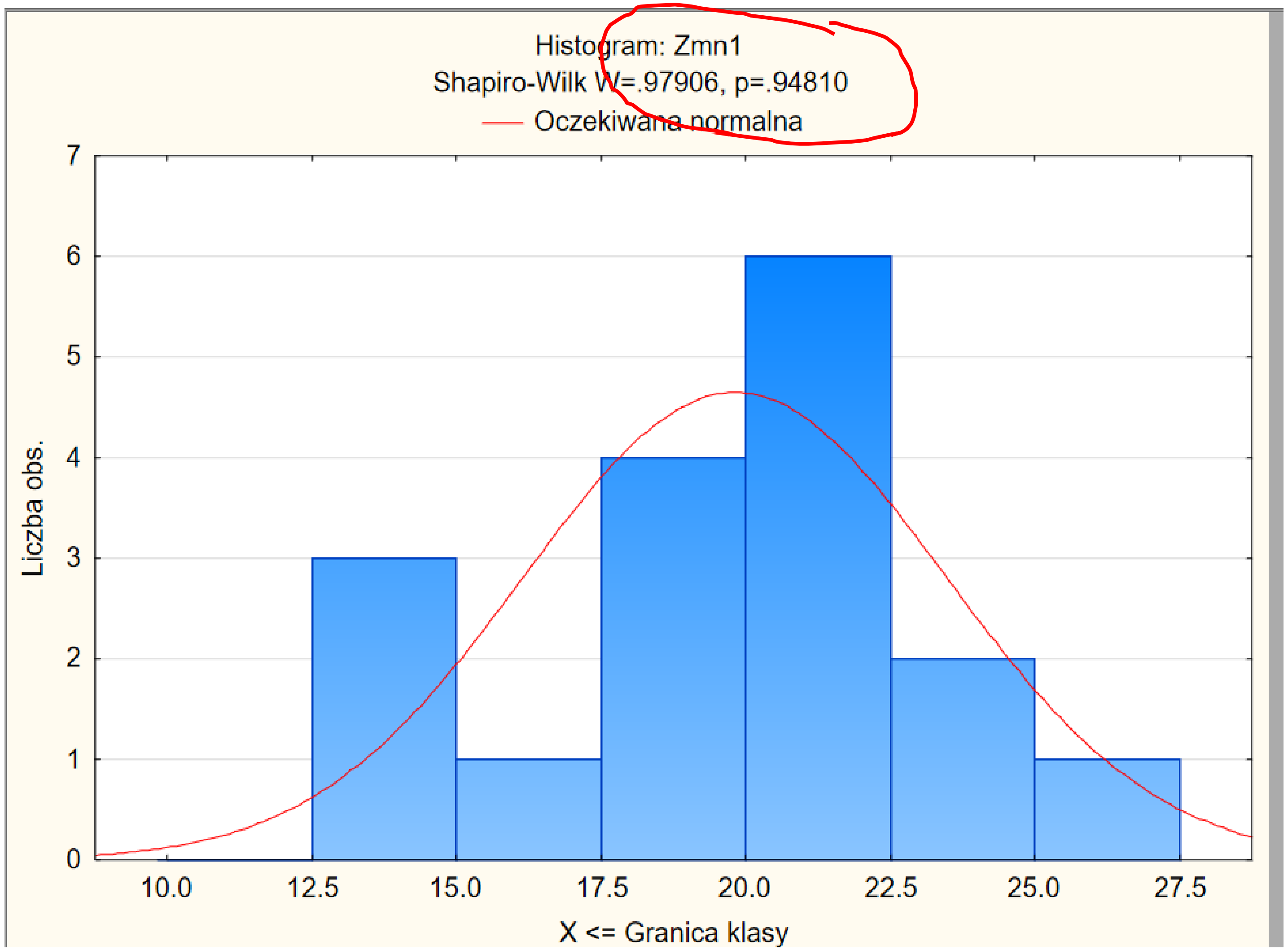
dane w jednej kolumnie

Statystyka→statystyki podstawowe→statystyki opisowe

Test normalności - przykład



Test normalności - przykład



Test normalności - przykład

Statistica:

wartość statystyki testowej (statystyka W)

W=0,979

wartość p (p-value)

p=0,948

na poziomie istotności α=0,05 (p>α)

nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

odpowiedź:

Dane pochodzą z rozkładu normalnego.

Test normalności - przykład

przykładowy kalkulator on-line dla testu Shapiro-Wilka:

http://www.statskingdom.com/320ShapiroWilk.html

Parametryczne testy istotności - przykłady

Przyjmijmy, że badana cecha ma rozkład normalny o nieznanej wartości średniej μ i odchyleniu standardowym σ.

Sprawdzamy, czy $\mu = \mu_0$:

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$

Średnia arytmetyczna z próby pobranej z populacji o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ ma rozkład $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Test istotności dla średniej populacji

Konstruujemy zmienną

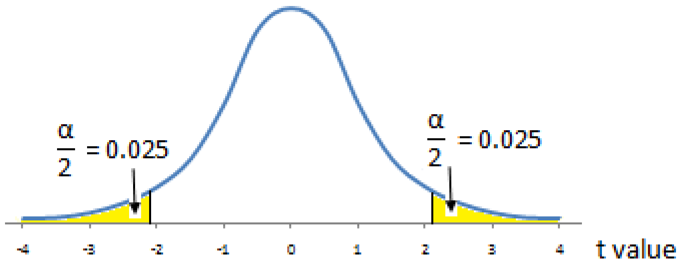
$$t_{emp} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$$

która ma rozkład t-Studenta o *n*-1 stopniach swobody.

Jeśli H_0 jest prawdziwa, to t_{emp} nie powinno przekraczać $t_{\alpha,n-1}$.

Student's t Distribution Table

For example, the t value for 18 degrees of freedom is 2.101 for 95% confidence interval (**2-Tail** $\alpha = 0.05$).



	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.95%	**1-Tail Confidence Level**
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%	**2-Tail Confidence Level**
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005	**1-Tail Alpha**
df	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	**2-Tail Alpha**
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192	
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991	
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240	
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103	
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688	
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588	
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079	
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413	
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809	
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869	
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.4370	
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.3178	
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208	
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405	
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728	
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	4.0150	
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.9651	
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9216	
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8834	

http://growingknowing.com/GKStatsBookStudentTTable.html

Test istotności dla średniej populacji - przykład

Badano zawartość witaminy C w soku pomidorowym przygotowanym według wybranej receptury. Pomiary zawartości witaminy C w 17 próbkach dały wyniki (mg/100g): 18,8 18,2 16,5 20,5 20,0 20,2 14,6 26,9 25,0 22,3 20,9 22,1 23,1 13,6 21,4 14,8 17,9. Przyjmij, że badana cecha ma rozkład normalny o nieznanych parametrach i zweryfikuj hipotezę, że średnia zawartość witaminy C w soku przygotowanym według tej receptury wynosi 20; przyjmij poziom istotności 0,05.

Test istotności dla średniej populacji - przykład

cecha: zawartość witaminy C w soku pomidorowym przygotowanym według wybranej receptury

populacja: sok pomidorowy przygotowany według wybranej receptury

hipoteza zerowa: średnia zawartość witaminy C w soku przygotowanym według tej receptury wynosi 20 mg/100g

lub H_0: $\mu=20$

hipoteza alternatywna: średnia zawartość witaminy C w soku przygotowanym według tej receptury wynosi 20 mg/100g

lub H_1: $\mu\neq20$

Test istotności dla średniej populacji - przykład

Hipotezę zerową odrzucamy gdy

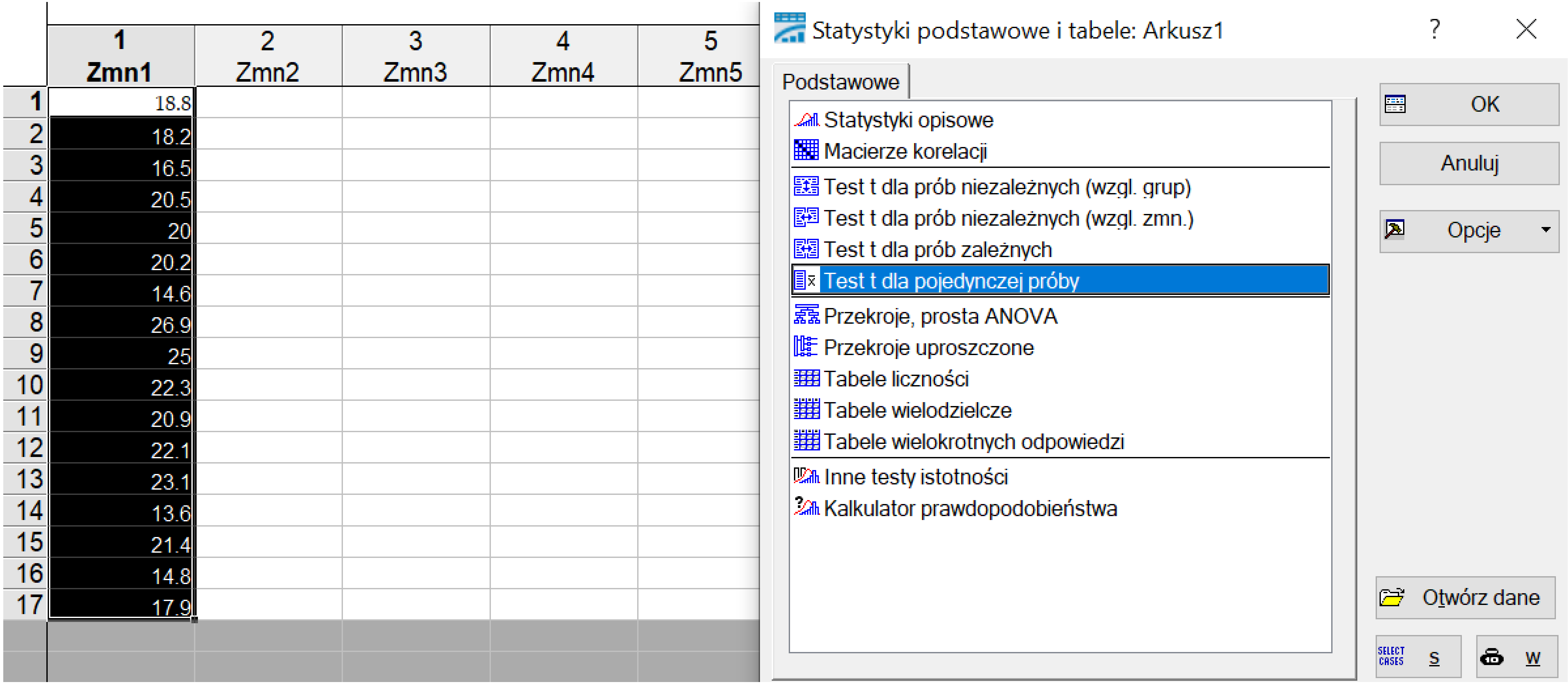
$t_{emp} > t_{kryt}$

czyli wyszliśmy poza założony obszar przyjęcia H_0

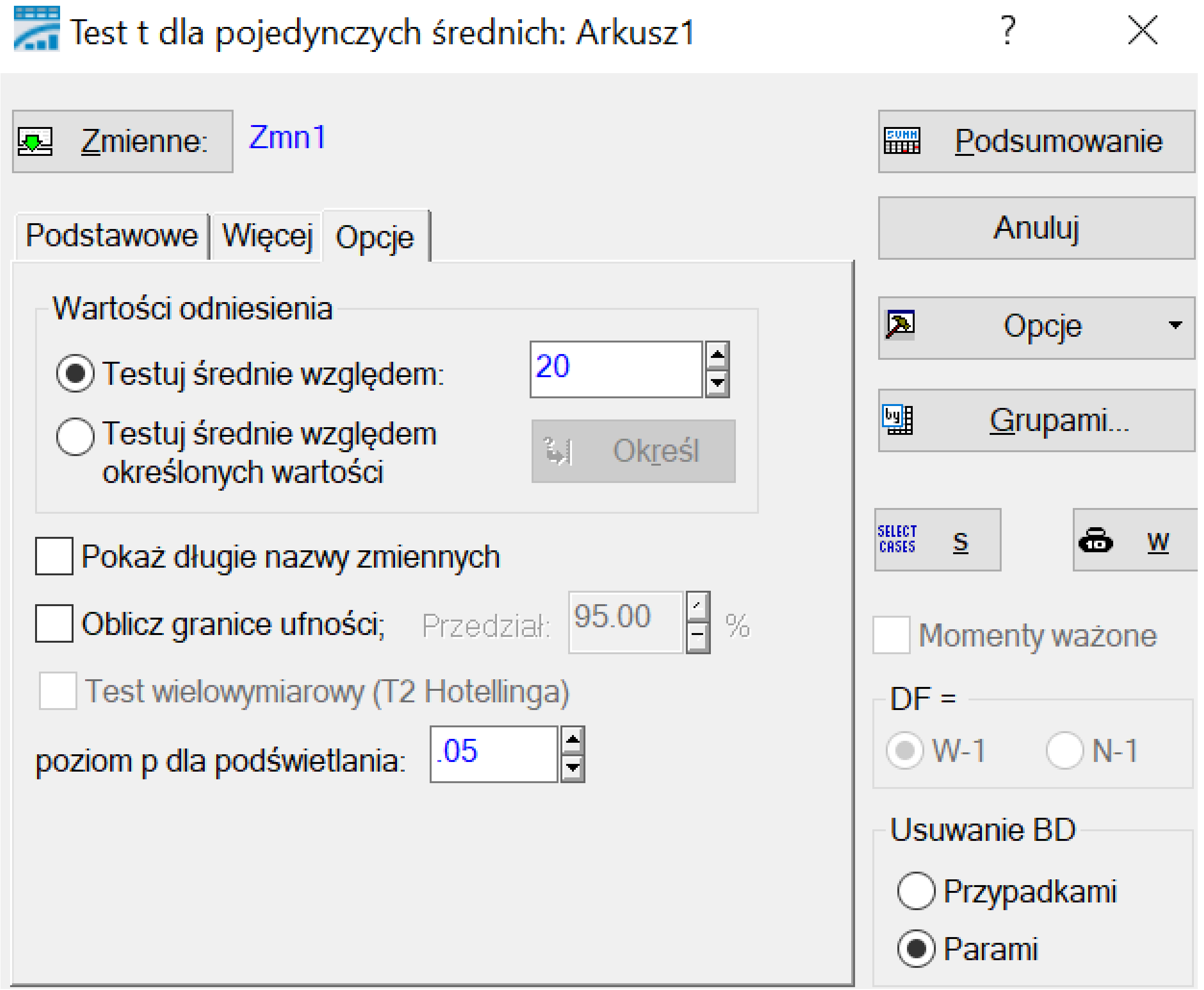
$p < \alpha$

czyli szansa uzyskania otrzymanego t_{emp} jest mniejsza niż założony poziom istotności

Test istotności dla średniej populacji – przykład Statistica



Test istotności dla średniej populacji – przykład Statistica



Test istotności dla średniej populacji – przykład Statistica

Zmienna	Test średnich względem stałej wartości odniesienia (Arkusz1)							
	Średnia	Odch.st.	Ważnych	Bł. std.	Odniesienie Stała	t	df	p
Zmn1	19.81176	3.647582	17	0.884669	20.00000	-0.212775	16	0.834190

Należy spojrzeć na wartość statystyki testowej t oraz wartość p (p-value). Jeśli p jest większe niż przyjęte α nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Test istotności dla średniej populacji – przykład Excel

średnia z próbki $\bar{x} = 19{,}81$

odchylenie standardowe próbki $s = 3{,}65$

liczba elementów w próbce $n = 17$

$$t_{emp} = \frac{\bar{x} - 20}{s}\sqrt{n} = -0{,}21$$

wartość krytyczna

=ROZKŁAD.T.ODW(0.05;16)=2.12

$$|t_{emp}| < t_{kryt}$$

Test istotności dla średniej populacji - przykład

wniosek statystyczny: nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

wniosek merytoryczny: zawartość witaminy C w soku pomidorowym przygotowanym według wybranej receptury wynosi 20 mg/100g