

UWAGA. We wszystkich zadaniach rachunkowych zalecane jest wykonanie obliczeń na tym kalkulatorze, który będzie wykorzystywany podczas egzaminu na auli.

W statystyce występują wzory przedstawiające działanie dodawania wielu liczb w wygodny, skrócony sposób. We wzorach dane liczbowe oznaczone są symbolami, np.:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{lub} \quad y_1, y_2, \dots, y_{20}$$

lub podobnymi. **Sumę** danych x_1, x_2, \dots, x_n zapisujemy w postaci:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Tę sumę można zapisać w jeszcze bardziej skróconej formie. W tym celu posługujemy się znakiem:

$$\Sigma$$

Jest to grecka litera **sigma**, dokładniej - duża sigma; w statystyce we wzorach pojawiają także inne greckie litery, np. mała sigma: σ .

Skrócony zapis sumy można przedstawić w kolejnych krokach:

1) **dodawanie liczb oznaczamy dużą sigma:**

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \Sigma \dots$$

2) **za znakiem sigmy zapisujemy ogólną postać każdego składnika sumy** (każdy składnik oznaczony jest literą x z dolnym indeksem, który przyjmuje różne wartości: $1, 2, \dots, n$; te różne wartości zastępujemy jedną wybraną literą, np. i , wówczas ogólna postać każdego składnika to x_i):

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

3) **pod symbolem sigmy oraz nad symbolem sigmy zapisujemy zakres wartości dla indeksu i** (indeks ten zastąpił wartości: $1, 2, \dots, n$, dlatego mówimy, że przyjmuje wartości od 1 do n):

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

Wyrażenie $\sum_{i=1}^n x_i$ czytamy: „suma składników x_i dla i przyjmującego wartości od 1 do n ” albo krócej: „suma x_i dla i od 1 do n ”.

Temat: Obliczanie wartości wyrażeńPrzykłady skróconego zapisu sumy

1) $x_1+x_2+\dots+x_{15} = \sum_{i=1}^{15} x_i$ (czyt.: suma x_i dla i od 1 do 15)

2) $y_1+y_2+\dots+y_{100} = \sum_{i=1}^{100} y_i$ (czyt.: suma y_i dla i od 1 do 100)

3) $z_1+z_2+z_3+\dots = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$ (czyt.: suma z_i dla i od 1 do nieskończoności)

4) $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ znany ze szkoły wzór na średnią arytmetyczną, oznaczaną symbolem \bar{x}

5) $x_1^2+x_2^2+\dots+x_{50}^2 = \sum_{i=1}^{50} x_i^2$ (czyt.: suma x_i^2 dla i od 1 do 50)

6) $(y_1-3)^2+(y_2-3)^2+\dots+(y_N-3)^2 = \sum_{i=1}^N (y_i-3)^2$ (czyt.: suma $(y_i-3)^2$ dla i od 1 do N)

Zadanie 1. Dane wyrażenie zapisz w postaci sumy składników. Zapisz dwa pierwsze i dwa ostatnie składniki sumy.

a) $\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 =$

b) $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i =$

c) $\sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) =$

Odpowiedzi:

a) $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{24} - \bar{x})^2 + (x_{25} - \bar{x})^2$

b) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_9 y_9 + x_{10} y_{10}$

c) $(x_1 - \bar{x}) \cdot (y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x}) \cdot (y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_{14} - \bar{x}) \cdot (y_{14} - \bar{y}) + (x_{15} - \bar{x}) \cdot (y_{15} - \bar{y})$

Zadanie 2. Dla danych x_i : 3, 5, 6, 8, 8 oblicz w pamięci lub pisemnie wartości podanych wyrażeń (symbol n w wyrażeniach oznacza liczbę danych).

a) $\sum_{i=1}^n x_i =$

b) $\sum_{i=1}^n x_i^2 =$

c) $\bar{x} =$

d) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) =$

e) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$

f) $\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 =$

UWAGA. Zachodzi wzór: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$

Odpowiedzi: a) 30 b) 198 c) 6 d) 0 e) 18 f) 18

Zadanie 3. Dla danych x_i z zad. 2 oraz danych $y_i : 0, 3, 6, 7, 9$ oblicz w pamięci lub pisemnie wartości podanych wyrażeń.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n y_i = \quad \text{b) } \bar{y} = \quad \text{c) } \sum_{i=1}^n x_i y_i = \quad \text{d) } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$$

UWAGA. Zachodzi wzór: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$

Odpowiedzi: a) 25 b) 5 c) 179 d) 29

Zadanie 4. Wyrażenia W_1, W_2 przedstawione są wzorami:

$$W_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad W_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 =$$

Przy użyciu kalkulatora lub arkusza kalkulacyjnego oblicz wartości tych wyrażeń dla danych:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^{10} x_i = 62,6, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 413,92$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{15} x_i = 2\,232, \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 337\,048$$

Odpowiedzi: a) $W_1=6,26$ $W_2=22,044$ b) $W_1=148,8$ $W_2=4\,926,4$

Zadanie 5. Wyrażenia A, B przedstawione są wzorami:

$$A = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad B = \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 p_i$$

Przy użyciu kalkulatora lub arkusza kalkulacyjnego oblicz wartości tych wyrażeń dla danych:

a)

$x_i:$	1	2	3
$p_i:$	0,1	0,6	0,3

b)

$x_i:$	0	1	2	3
$p_i:$	0,4	0,2	0,1	0,3

Odpowiedzi: a) $A=2,2$ $B=0,36$ b) $A=1,3$ $B=1,61$

Komentarz do zadań 6, 7 jest w filmie: <https://youtu.be/a5vgzSTJlfI>

Zadanie 6. Wyrażenia r, t przedstawione są wzorami:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{SS_x} \cdot \sqrt{SS_y}} \quad t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}$$

Przy użyciu kalkulatora lub arkusza kalkulacyjnego oblicz wartości tych wyrażeń dla danych:

a) $n = 22, SS_x = 73,02, SS_y = 514,78, S_{xy} = 160,43$

b) $n = 14, SS_x = 84,67, SS_y = 650,64, S_{xy} = -123,90$

Wyniki liczbowe zapisz z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Komentarz do odpowiedzi: Wartość t zależy od dokładności r . Można przyjąć $r = 0,83$ lub wziąć r obliczone z dużą dokładnością (np. z komórki arkusza kalkulacyjnego).

a) dla $r = 0,83, t \approx 6,65$, ale dla r z komórki arkusza dostajemy $t \approx 6,59$

b) dla $r = -0,53, t \approx -2,17$, ale dla r z komórki arkusza $t \approx -2,15$

Zadanie 7. Wyrażenia b, F przedstawione są wzorami:

$$b = \frac{S_{xy}}{SS_x} \quad F = \frac{b S_{xy} (n-2)}{SS_y - b S_{xy}}$$

Przy użyciu kalkulatora lub arkusza kalkulacyjnego oblicz wartości tych wyrażeń dla danych:

a) $n = 22, SS_x = 73,02, SS_y = 514,78, S_{xy} = 160,43$

b) $n = 14, SS_x = 84,67, SS_y = 650,64, S_{xy} = -123,90$

Wyniki liczbowe zapisz z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Odpowiedzi: (komentarz, jak do zad. 6)

a) dla $b = 2,20, F \approx 43,62$, ale dla b z komórki arkusza dostajemy $F \approx 43,43$

b) dla $b = -1,46, F \approx 4,62$, ale dla b z komórki arkusza dostajemy $F \approx 4,64$