

Kierunek BIOLOGIA

Ćwiczenia 4: FUNKCJE, GRANICE, ASYMPTOTY

Zadanie 1. Oblicz granicę funkcji. Przy każdym przykładzie zinterpretuj wynik: wskazuje, czy nie – na istnienie asymptoty i jeśli tak, opisz asymptotę.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 4x}{5x^2 + 6}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 5}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{4x}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{2x^2 - 5}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$ k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x$ l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x$

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot e^x$ n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \cdot 2^x$

Odp.: a) 0, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) 0,25, f) -0,25, g) 0, h) 1, i) $+\infty$, j) 0, k) $+\infty$, l) $-\infty$, m) 0, n) 0.

Zadanie 2. Wyznacz asymptoty pionowe i poziome danych funkcji.

Wskazówka. Rozwiązywanie należy zacząć od określenia dziedziny funkcji. Istnienie asymptot poziomych ustalamy po obliczeniu granic dla $x \rightarrow +\infty$ oraz $x \rightarrow -\infty$, jeśli ich obliczanie w ogóle ma sens. Natomiast istnienie asymptot pionowych ustalamy po obliczeniu granic dla x dążących do skończonej wartości („wyrzuconej” z osi liczbowej). Mówimy, że obliczamy granice na krańcach dziedziny.

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, b) $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, c) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$, d) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Odp.: a) $D = R$, więc nie ma asymptot pionowych; $y = 0$ jest as. poziomą obustronną,

b) $D = R$, więc nie ma asymptot pionowych; $y = 0$ jest as. poziomą obustronną,

c) $D = R - \{0\}$, więc asymptotą pionową może być prosta $x = 0$ (nie musi–trzeba to sprawdzić); po obliczeniu granic dostajemy: $x = 0$ jest as. pionową obustronną, $y = 0$ jest as. poziomą obustronną,

d) $D = R - \{-1, 1\}$, więc asymptotami pionowymi mogą być proste $x = -1$, $x = 1$ (nie muszą–trzeba to sprawdzić); po obliczeniu granic dostajemy: $x = 1$ jest as. pionową obustronną, $x = -1$ jest as. pionową obustronną, $y = 0$ jest as. poziomą obustronną.

dr Anna Rajfura