

Zadania RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Wymagania:

- na spr. 3 będzie równanie różniczkowe podobne do przykładów z zad. 1,
- w terminie poprawkowym będzie zadanie z treścią (podobne do zadań 2-5).

Zad. 1. Wyznacz rozwiązanie ogólne równania różniczkowego oraz rozwiązanie szczególne spełniające podany warunek początkowy:

	Równanie	Warunek początkowy	Uwagi
1a.	$y \cdot y' = 2$	$y(1) = 3$	
1b.	$y \cdot y' = 2$	$y(1) = -3$	
1c.	$y \cdot y' = 2$	$y(0) = 3$	
2.	$2y' = xy$	$y(0) = 4$	
3.	$y' = \frac{3y}{x}, \quad x > 0$	$y(1) = 4$	Sprawdź poprawność wyniku.
4.	$y' = \frac{x}{4y}$	$y(2) = -3$	
5.	$\frac{y'}{y} = 1$	$y(1) = \frac{1}{2}e$	
6.	$y' = 3y^2$	$y(0) = 2$	Sprawdź poprawność wyniku.
7.	$y \cdot y' = 3x^2 + 1, \quad x > 0$	$y(0) = -2$	
8.	$y' = y(x+1)$	$y(0) = 2$	

Odp.:

	Rozwiązanie ogólne	Rozwiązanie szczególne
1a.	$y(x) = \pm \sqrt{4x+c}$	$y(x) = \sqrt{4x+5}$
1b.	$y(x) = \pm \sqrt{4x+c}$	$y(x) = -\sqrt{4x+5}$
1c.	$y(x) = \pm \sqrt{4x+c}$	$y(x) = \sqrt{4x+9}$
2.	$y(x) = ce^{\frac{1}{4}x^2}$	$y(x) = 4e^{\frac{1}{4}x^2}$
3.	$y(x) = cx^3$	$y(x) = 4x^3$
4.	$y(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + c}$	$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 8}$
5.	$y(x) = ce^x$	$y(x) = \frac{1}{2}e^x$
6.	$y(x) = \frac{1}{-3x+c}$	$y(x) = \frac{2}{-6x+1}$

7.	$y(x) = \pm \sqrt{2x^3 + 2x + c}$	$y(x) = -\sqrt{2x^3 + 2x + 4}$
8.	$y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2+x}$	$y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x^2+x}$

W poniższych zadaniach przydatny jest wzór:

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Zad. 2. Według prawa Newtona prędkość stygnięcia ciała (tzn. pochodna temperatury ciała T względem czasu t) jest wprost proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała T i temperaturą otoczenia T_1 ($T > T_1$) ze stałym dodatnim współczynnikiem proporcjonalności k . Przyjmijmy, że początkowa temperatura ciała wynosi T_0 . Znaleźć funkcję opisującą zmienność temperatury stygnącego ciała T w czasie t .

Podp.: Równanie: $T' = -k(T - T_1)$, stała $k > 0$, $T(0) = T_0$

Odp.: $T(t) = (T_0 - T_1) \cdot e^{-kt} + T_1$.

Zad. 3. Napój o temperaturze 100°C postawiono w pokoju o stałej temperaturze równej 20°C . Po 10 minutach temperatura napoju obniżyła się do 60°C

- Wyznacz zależność temperatury napoju od czasu. (*Wskazówka.* wykorzystaj wynik z zad. 2.)
- Po ilu minutach temperatura napoju obniży się do 40°C ?
- Jaka będzie temperatura napoju po godzinie?

Odp.: b) po 20 minutach, c) ok. 21°C .

Zad. 4. Prędkość rozkładu cukru w roztworze wodnym pod wpływem katalitycznego działania kwasu wyraża się za pomocą wzoru:

$$y' = k(y_0 - y)$$

gdzie $y(t)$ – ilość cukru, która uległa rozkładowi w czasie t , y_0 – początkowa ilość cukru, k – stały współczynnik proporcjonalności. Znaleźć zależność ilości cukru w roztworze od czasu $y(t)$.

Odp.: $y(t) = y_0(1 - e^{-kt})$.

Zad. 5. Okres połowicznego rozpadu ciała promieniotwórczego $T_{1/2}$ to czas, po upływie którego początkowa masa ciała m_0 zmniejsza się o połowę. Dla pewnego ciała okres ten wynosi 600 lat. Ile zostanie masy z początkowej 200 kg po upływie 1500 lat, jeśli prędkość rozpadu jest proporcjonalna do masy ciała?

Odp.: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$, ok. 35,36 kg.

dr Anna Rajfura