

Zadania DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Uwaga. Zadania z gwiazdką są adresowane do osób nadzwyczajnie zainteresowanych tematem.

Zadanie 1 pokazuje, że macierz jednostkowa I jest elementem obojętnym mnożenia w zbiorze macierzy.

Zad. 1. Oblicz iloczyny macierzy AI , IA , BI , IB . W każdym przypadku tak dobierz stopień macierzy jednostkowej, aby działanie było wykonalne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

W zadaniu 2 zastosowano oznaczenia: $G^2 = G \cdot G$, $G^3 = G \cdot G \cdot G$.

Zad. 2. Dana jest macierz $G = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Oblicz: a) G^2 , b) G^3 .

W zadaniu 3 należy zastosować poprawną kolejność działań (slajd 26 w pliku wykładowym).

Zad. 3. Na danych macierzach wykonaj wskazane działania lub uzasadnij, że są niewykonalne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) $A+B^T$, b) $3A-2B$, c) $A-2D^T$, d) BC , e) CAD , f) $A^T C^2$, g) $D^T E^T$, h) AF , i) $F^T AF$, j) EDC , k) $AD+BC$, l) $A^T A+DD^T$, m) $B^T C^T$, n) FF^T+DA , o) EBB^T .

Zad. 4. Na macierzach z zad. 3 wykonaj działania: a) CD^T , b) $C^T D$, c) $(CD)^T$, d) $C^T D^T$.

Zad. 5. Dla danych macierzy A , B oblicz $AB-BA$.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \text{ b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zad. 6*. Sprawdź prawa działań na macierzach dla przykładów:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$
$$F = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) prawo łączności dodawania: $(A+B)+C = A+(B+C)$,

b) prawo przemienności dodawania: $D+F = F+D$,

c) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $(-2)(D+F) = (-2)D + (-2)F$,

d) prawo łączności mnożenia: $(DB)E = D(BE)$,

Zadania DZIAŁANIA NA MACIERZACH

- e) mnożenie iloczynu macierzy przez liczbę: $3(DE) = (3D)E = D(3E)$,
f) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $(A + B)E = AE + BE$,
g) prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $D(A + B) = DA + DB$,
h) prawo transponowania sumy: $(D + F)^T = D^T + F^T$,
i) prawo podwójnej transpozycji: $(F^T)^T = F$,
j) prawo transponowania iloczynu: $(FE)^T = E^T F^T$.

Odpowiedzi

Zad. 2. a) $\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 27 & -19 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Zad. 3. a), d), i), k), o) – niewykonalne, b) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -2 & 0 \\ 15 & 5 & 4 & 0 \\ -7 & -6 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & -6 \\ -3 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 34 & -14 & -6 \\ 18 & -27 & -26 \\ 48 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 52 & 47 & 41 \\ 38 & 30 & 18 \\ 30 & 53 & 31 \\ -4 & 18 & 18 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, j) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 27 & 50 & 27 \end{bmatrix}$,

l) $\begin{bmatrix} 29 & 15 & 6 & 5 \\ 15 & 16 & 11 & -5 \\ 6 & 11 & 18 & -12 \\ 5 & -5 & -12 & 18 \end{bmatrix}$, m) $\begin{bmatrix} -2 & 8 & -8 \\ 6 & 13 & 11 \\ 4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 18 \end{bmatrix}$, n) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & -4 & -3 & 1 \\ -7 & -6 & -7 & 0 \\ 17 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.

Zad. 4. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & 10 \\ 2 & -7 & -13 & 11 \\ 6 & 5 & -11 & 19 \end{bmatrix}$, b), c) – niewykonalne, d) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -13 & 8 \\ 7 & 0 & -16 & 17 \\ 1 & -4 & -9 & 11 \end{bmatrix}$.

Zad. 5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

dr Anna Rajfura