Temat:

Zmienna losowa.
Rozkład skokowy. Rozkład ciągły

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie
pomarańczowy – uwaga

Zagadnienia

1. Przypomnienie wybranych pojęć rachunku prawdopodobieństwa
2. Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej
3. Rozkłady skokowe: dwupunktowy, dwumianowy
4. Rozkłady ciągłe: normalny
5. Parametry rozkładu

Doświadczenie losowe

Przykłady: rzut kostką do gry
rzut monetą
losowanie kuli z urny
losowanie karty z talii kart
strzał do celu

Mogą być powtarzane wielokrotnie.

Doświadczenie losowe to takie doświadczenie, w którym wiadomo z góry, jakie wyniki mogą się pojawić, ale wynik konkretnego doświadczenia poznajemy dopiero po jego przeprowadzeniu.
Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywa się zdarzeniem elementarnym.

Opis matematyczny dośw. los.

<u>Przykład 1</u>. Doświadczenie losowe *D* - rzut monetą

Wszystkie możliwe wyniki (zdarzenia elementarne): orzeł, reszka

Zbiór wszystkich możliwych wyników:

$$\{\, O, R \,\}$$

Zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego (zdarzeń elementarnych) nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych, ozn. Ω.

Zdarzenie losowe

Przykład 2. Doświadczenie losowe *D* - rzut kostką do gry

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Przyjmujemy, że kostka jest rzetelna, symetryczna (wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne).

***A* – zdarzenie losowe polegające na tym, że wypadły dokładnie dwa oczka**

$$A = \{ 2 \}$$

W nawiasach podajemy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu losowemu A.

Przykład 2 cd.

B **– zdarzenie losowe polegające na tym, że wypadły co najmniej cztery oczka**

$$B = \{ 4, 5, 6 \}$$

Moc zbioru

Oznaczenie

$$\overline{\overline{Y}} \; - \text{moc zbioru } Y$$

Moc zbioru *Y* to liczba elementów tego zbio-ru.

W przykładzie 2:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \overline{\overline{\Omega}} = 6$$

$$A = \{2\} \qquad \overline{\overline{A}} = 1$$

$$B = \{4, 5, 6\} \qquad \overline{\overline{B}} = 3$$

Prawdopodobieństwo

Wzór Laplace'a (1812)
klasyczna definicja p-stwa

<u>Oznaczenie</u>

P*(*A*) - p-stwo zdarzenia losowego *A

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Komentarz o „definicji" i warunkach stosowania wzoru.

Przykład 2 cd.

$$P(A)=\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{1}{6}\approx 0{,}167=16{,}7\ \%$$

$$P(B)=\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\frac{3}{6}=0{,}5=50\ \%$$

Inne przykłady.

Definicja aksjomatyczna p-stwa Kołmogorowa (1933)

P-stwo zdarzenia losowego *A*, dla $A \subset \Omega$,

ma spełniać następujące warunki (aksjomaty):

1. $P(A) \geq 0,$
2. $P(\Omega) = 1,$
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

gdzie $A_1, A_2, \ldots$ - zdarzenia losowe wykluczające się (zbiory rozłączne).

Pojęcie zmiennej losowej

Przykład

<u>Przykład</u>. W pewnej grze gracz rzuca kostką. Jeżeli wypadnie więcej niż 4 oczka, to gracz dostaje 10 zł, w przeciwnym razie płaci 1 zł.

Jak najpełniej opisać wygraną gracza?

Przykład cd.

D

wyniki dośw. D: 1 2 3 4 5 6

wygrana gracza: -1 -1 -1 -1 10 10

wygrana x_i:	-1	10
p-stwo p_i:	4/6 = 2/3	2/6 = 1/3

Przykład cd.

Dośw. los. *D* - rzut kostką do gry

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A_1 - zdarzenie losowe polegające na tym, że gracz dostaje 10 zł:

$$A_1 = \{5, 6\}$$

A_2 - zdarzenie losowe polegające na tym, że gracz płaci 1 zł:

$$A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(A_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Przykład cd.

D

Zmienna losowa

wyniki dośw. D:	1	2	3	4	5	6
wygrana gracza:	-1	-1	-1	-1	10	10

wygrana x_i:	-1	10
p-stwo p_i:	$4/6 = 2/3$	$2/6 = 1/3$

Zmienna losowa - definicja

Zmienna losowa to funkcja, która wynikom doświadczenia losowego przyporządkowuje wartości liczbowe.

Ozn.: $X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, X_3, \ldots$

$$X: \quad wynik \rightarrow \quad liczba$$

Rozkład zmiennej losowej

Przykład cd.

Zmienna losowa *X* – wygrana gracza

Tabelka:

wartości x_i:	-1	10
p-stwo p_i:	2/3	1/3

przedstawia rozkład zmiennej losowej *X*.

Rozkład zmiennej losowej

Przykład cd.

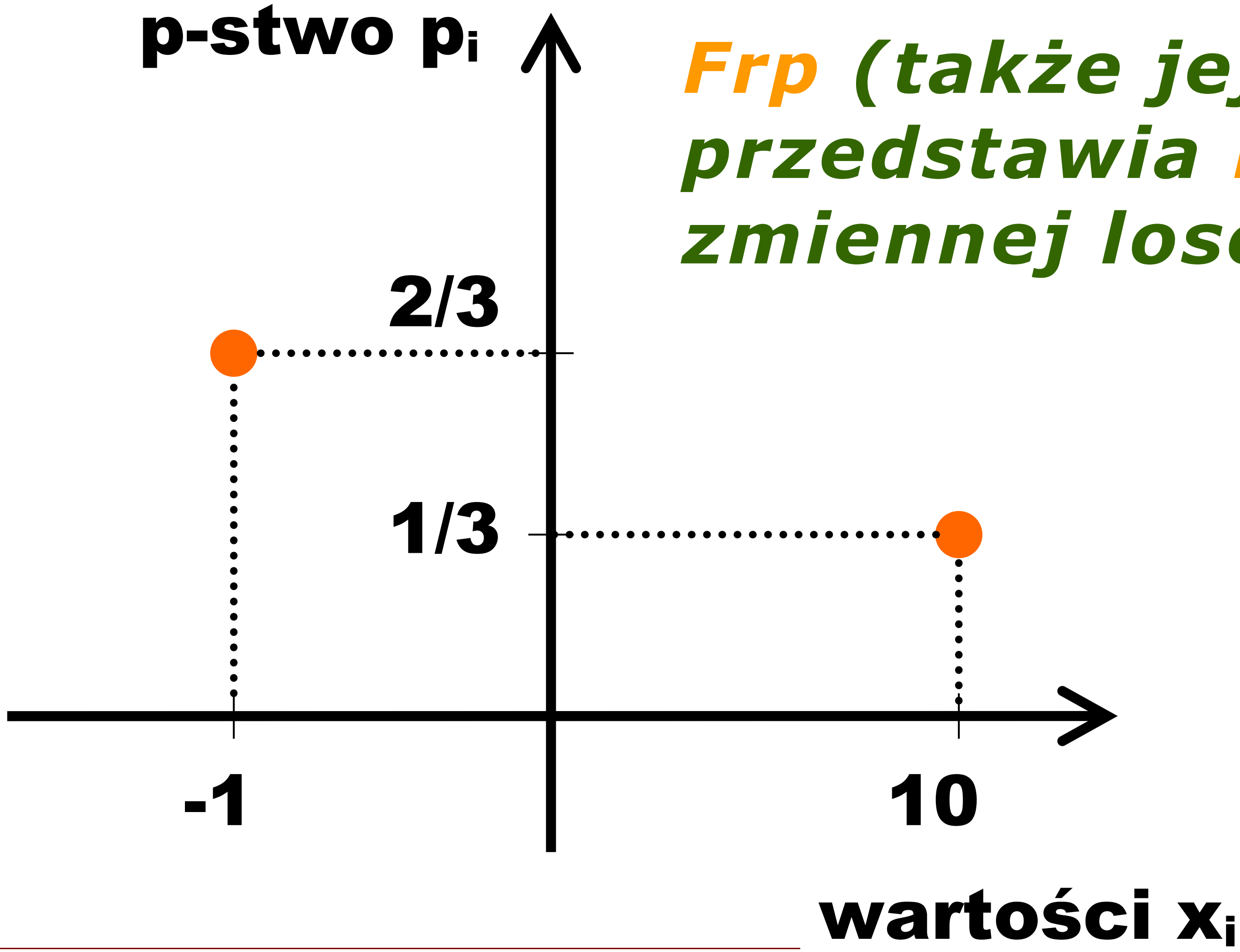
Funkcja rozkładu p-stwa*: $f\,(x_i)=p_i$

***w skrócie „*frp*"**

Rozkład zmiennej losowej

Przykład cd.

Funkcja rozkładu p-stwa*: $f\,(x_i)=p_i$



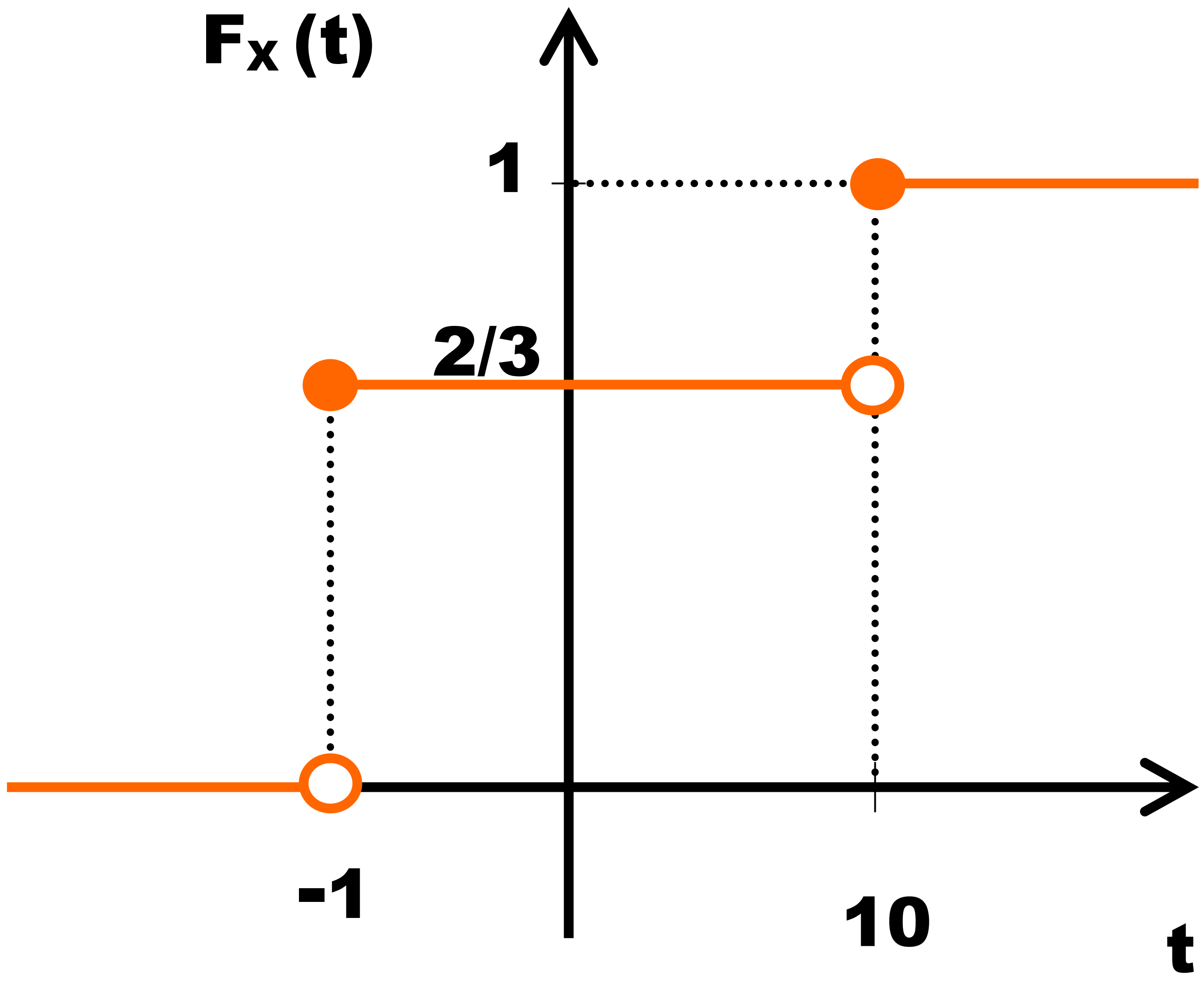
***Frp** (także jej **wykres**) przedstawia **rozkład** zmiennej losowej X.*

Dystrybuanta - definicja

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*:

$$F_X(t) \overset{def}{=} P(X \le t), \quad t \in R$$

Wykres dystrybuanty – przykład



Komentarz

Różnie określone zmienne losowe X, Y, nawet z różnych doświadczeń losowych D_X, D_Y i przestrzeni Ω_X, Ω_Y, mogą mieć jednakowe rozkłady (przykład na tablicy). Dlatego można badać własności samych rozkładów, pomijając słowny opis zmiennej losowej.

Typy rozkładów

Rozkład

skokowy (dyskretny)

ciągły

Przykłady rozkładów skokowych

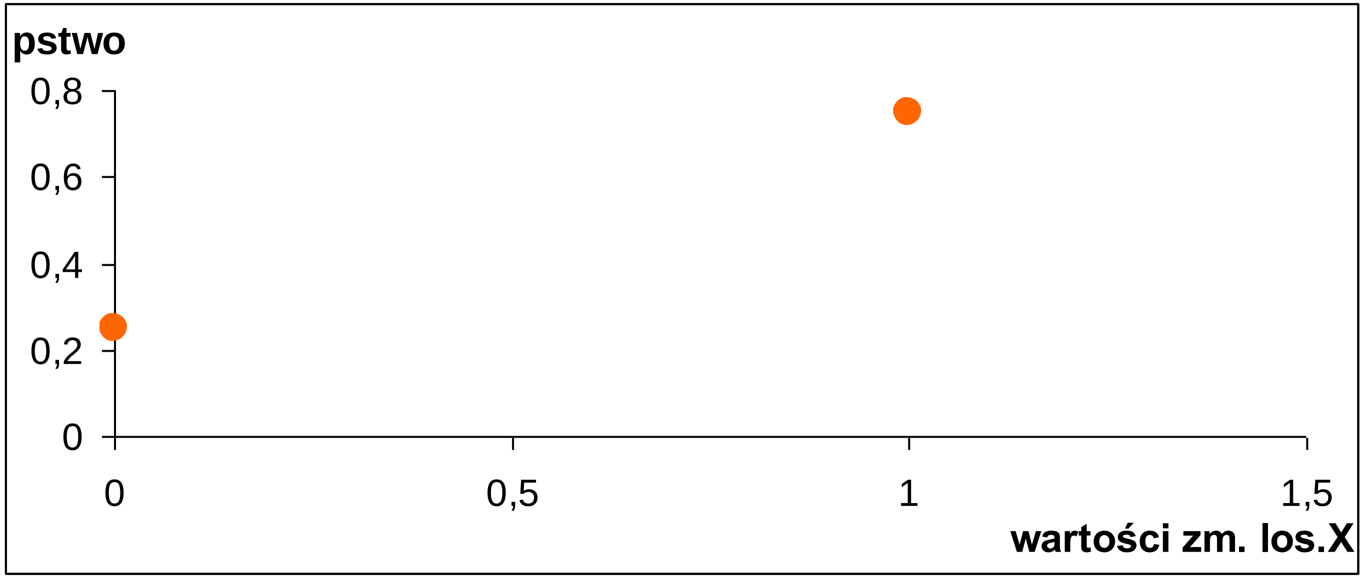
- **dwupunktowy (0-1)**
- **równomierny**
- **dwumianowy**
- **Poisson (*czyt.: płasona*)**

Rozkład dwupunktowy

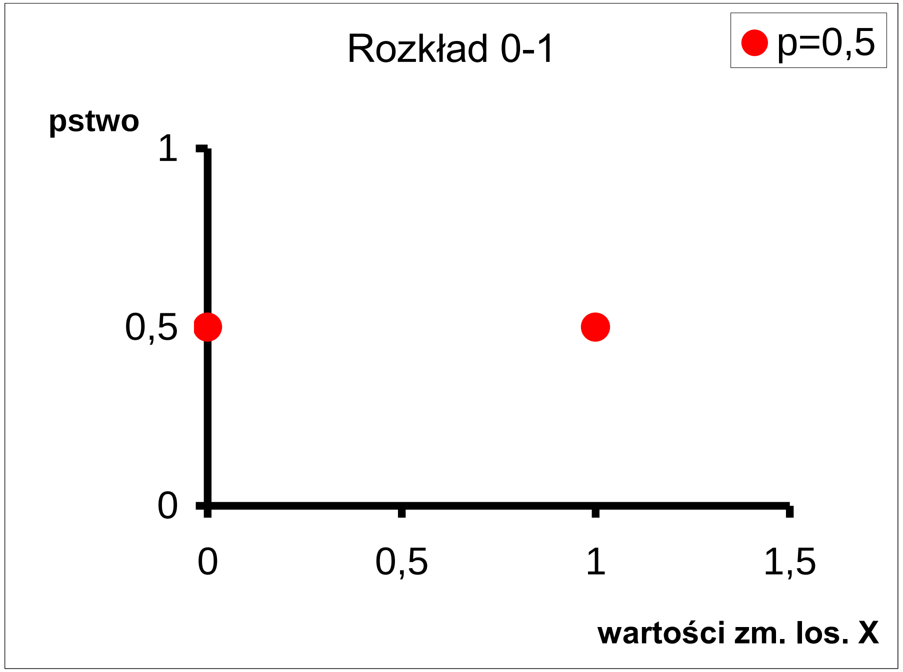
Inne nazwy: zero-jedynkowy, 0-1.

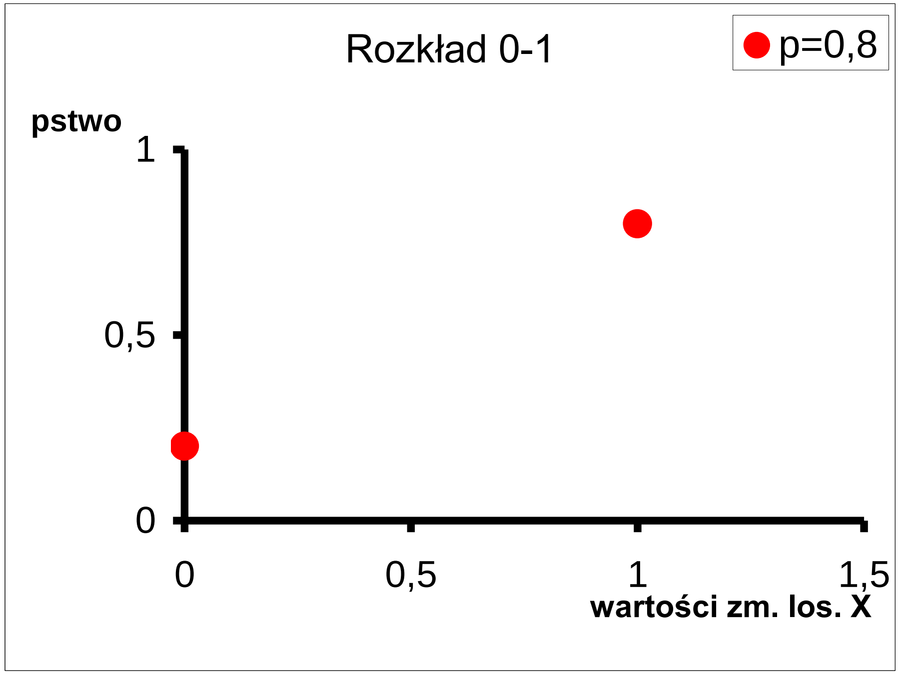
wartości x_i	0	1	
p-stwo p_i	$1 - p$	p	$\Sigma\, p_i = 1$

Wykres funkcji rozkładu p-stwa



Przykłady rozkładów dwupunktowych





Zadanie*

Narysuj wykres dystrybuanty dla przedstawionych przykładów.

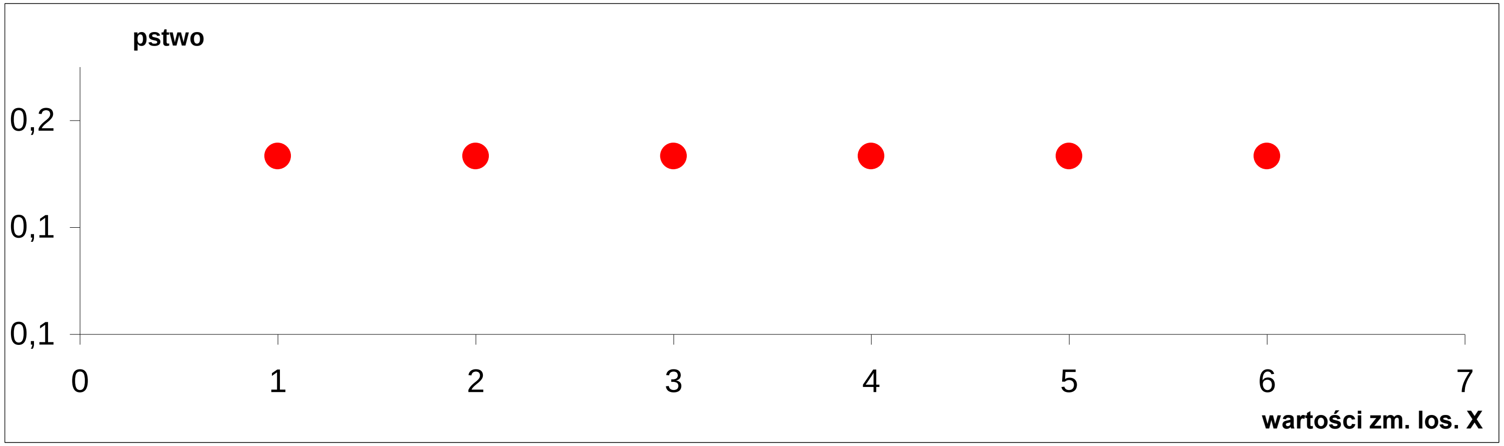
* Rozkład równomierny

wartości x_i	x_1	x_2	...	x_n
p-stwo p_i	p	p	...	p

$\Sigma\, p = 1$

zatem $p = 1/n$

Wykres funkcji rozkładu p-stwa



Rozkład dwumianowy *B*(*n*, *p*)

Wartości k: 0, 1, 2, ... , *n*

P-stwo: $$P_n(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

***n*, *p* – parametry rozkładu**

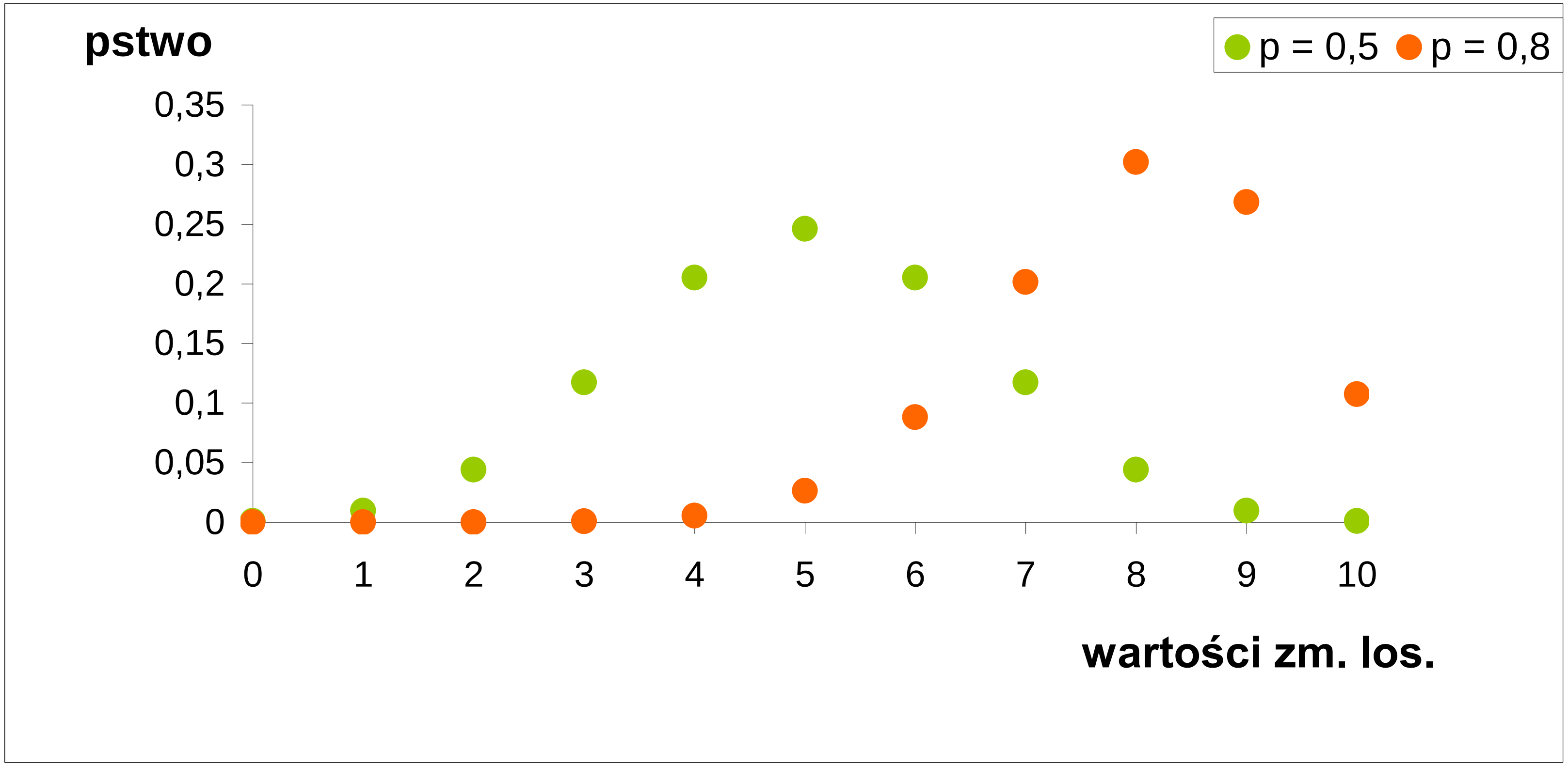
<u>* Interpretacja parametrów</u>

W schemacie *n* doświadczeń niezależnych Bernoulliego:

***n* – liczba prób**
***p* – p-stwo sukcesu w pojedynczej próbie**

Wykres funkcji rozkładu *B*(*n*, *p*)

Wykres funkcji rozkładu p-stwa dla *n* = 10



Rozkład Poissona $P(\lambda)$

Wartości k: 0, 1, 2, ...

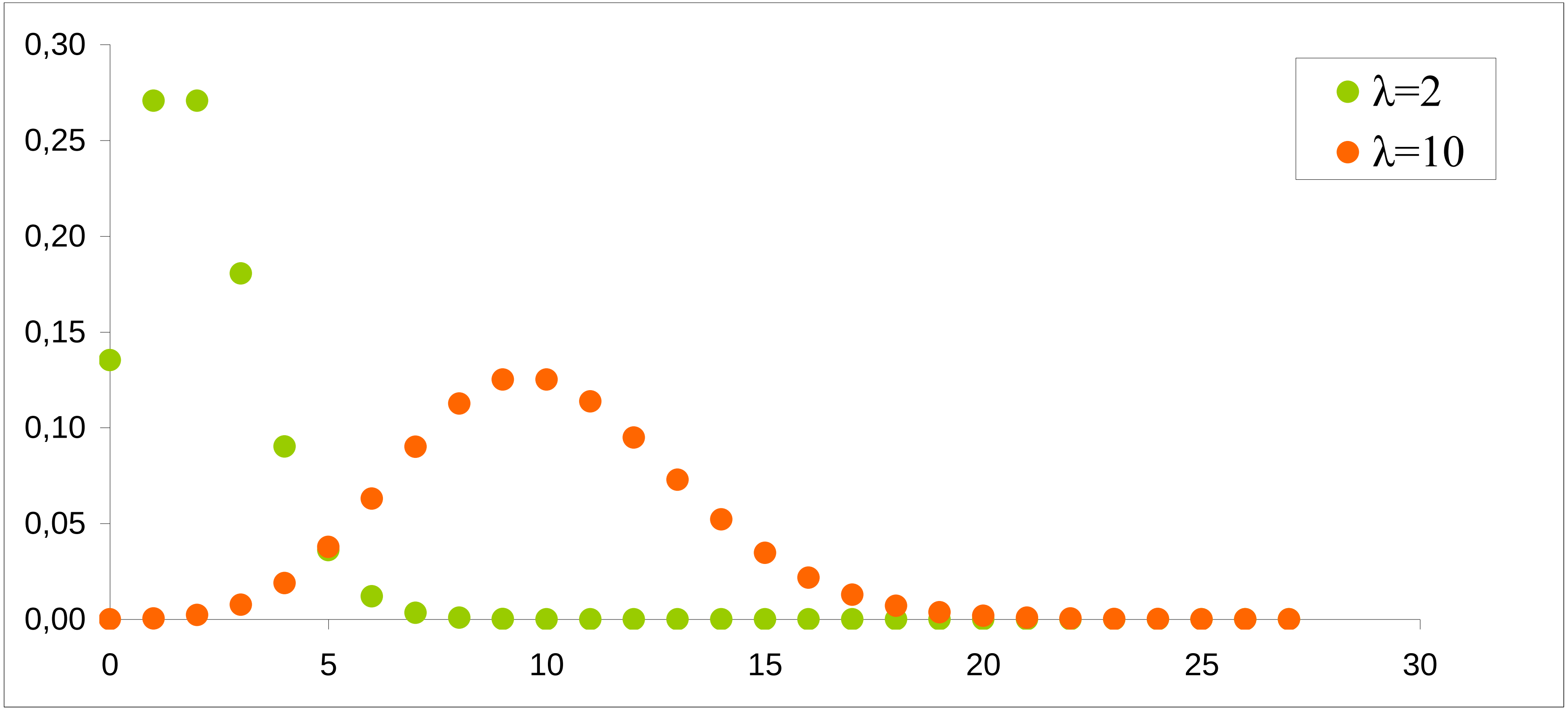
P-stwo:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

λ – parametr rozkładu, $\lambda > 0$

Wykres funkcji rozkładu *P*(*λ*)

Wykres funkcji rozkładu p-stwa



Charakterystyki rozkładu

Nazwy i oznaczenia:

nazwa:	średnia	wariancja	odchylenie standardowe
ozn.:	EX, μ	D^2X, σ^2	$\sqrt{D^2X}$, σ

Wzory dla rozkładu skokowego

X - zmienna losowa skokowa

wartość x_i	x_1	x_2	...	x_n
pstwo p_i	p_1	p_2	...	p_n

$$EX \stackrel{def}{=} x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_i x_ip_i$$

$$D^2X \stackrel{def}{=} (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \ldots + (x_n - EX)^2 p_n =$$
$$= \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$$

Obliczenia na tablicy.

Wzory

Charakterystyki rozkładu dwumianowego

$$EX = np$$

$$D^2X = np(1-p)$$

Charakterystyki rozkładu Poissona

$$EX = \lambda$$

$$D^2X = \lambda$$

Typy rozkładów

Rozkład

skokowy **ciągły**

Przykłady:

- **dwupunktowy (0-1)**
- **równomierny**
- **dwumianowy**
- **Poissona**

Komentarz do idei przedstawienia rozkładu ciągłego.

Rozkład ciągły

Rozkład zmiennej losowej ciągłej

Rozkład zmiennej losowej *X* ciągłej można przedstawić za pomocą:

- **funkcji gęstości p-stwa (fgp)**

$$y = f(x)$$

- **funkcji dystrybuanty:**

$$F_X(t) \overset{def}{=} P(X \leq t)$$

* Funkcja gęstości p-stwa – def.

Funkcja gęstości p-stwa zmiennej losowej *X*, ozn.: *y = f (x)*, to funkcja spełniająca warunki:

1. wykres leży nad lub na osi *OX*

$$f(x) \geq 0, \qquad \text{gdy } x \in D_f$$

2. pole obszaru ograniczonego z góry wykresem funkcji, a z dołu osią *OX* jest równe 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Rozkład normalny

Rozkład normalny

Wzór funkcji gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R$$

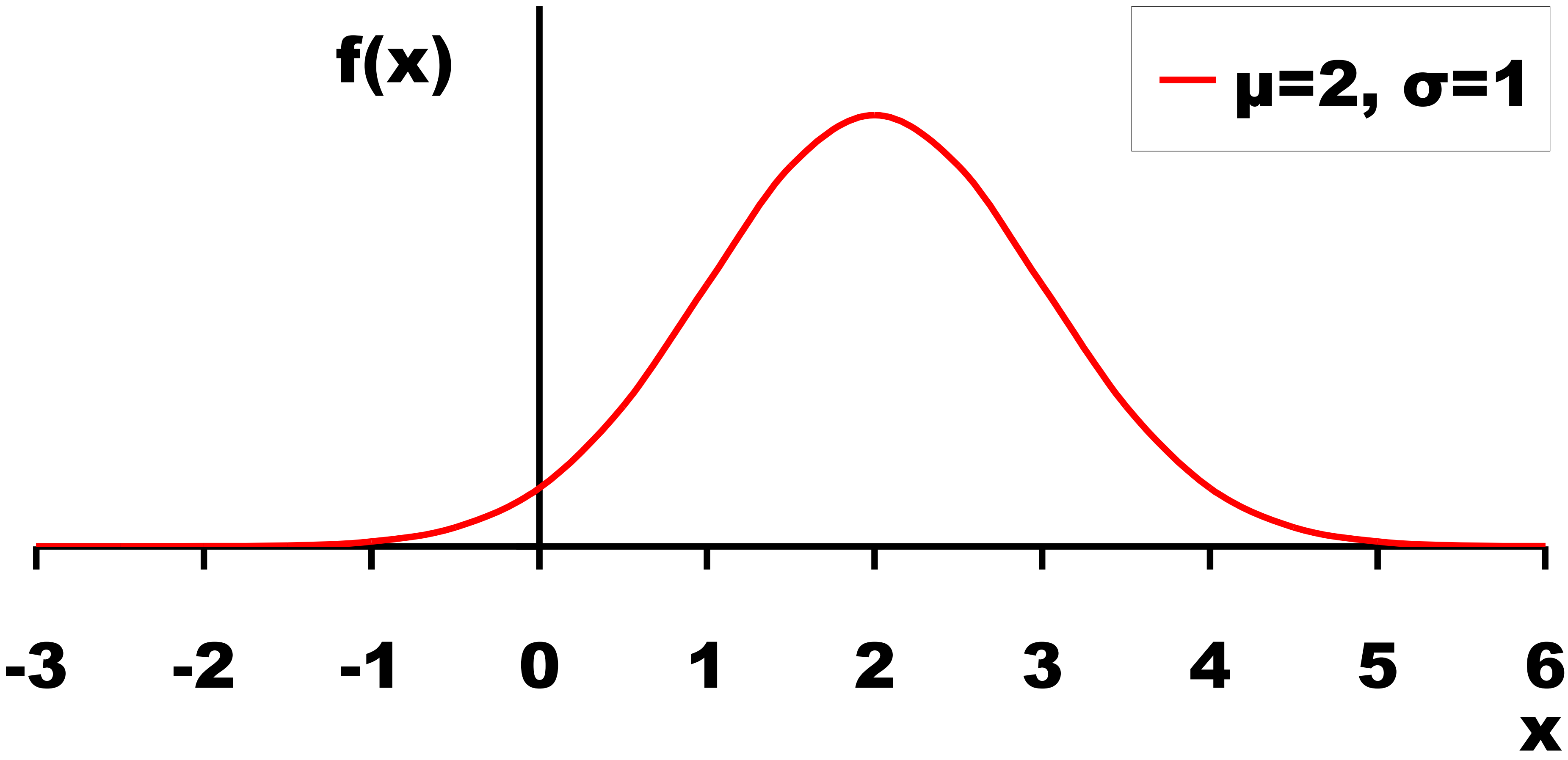
Parametry w rozkładzie normalnym:

μ **(czyt.: mi)**

σ **(czyt.: sigma)**

$$\mu \in R \qquad\qquad \sigma > 0$$

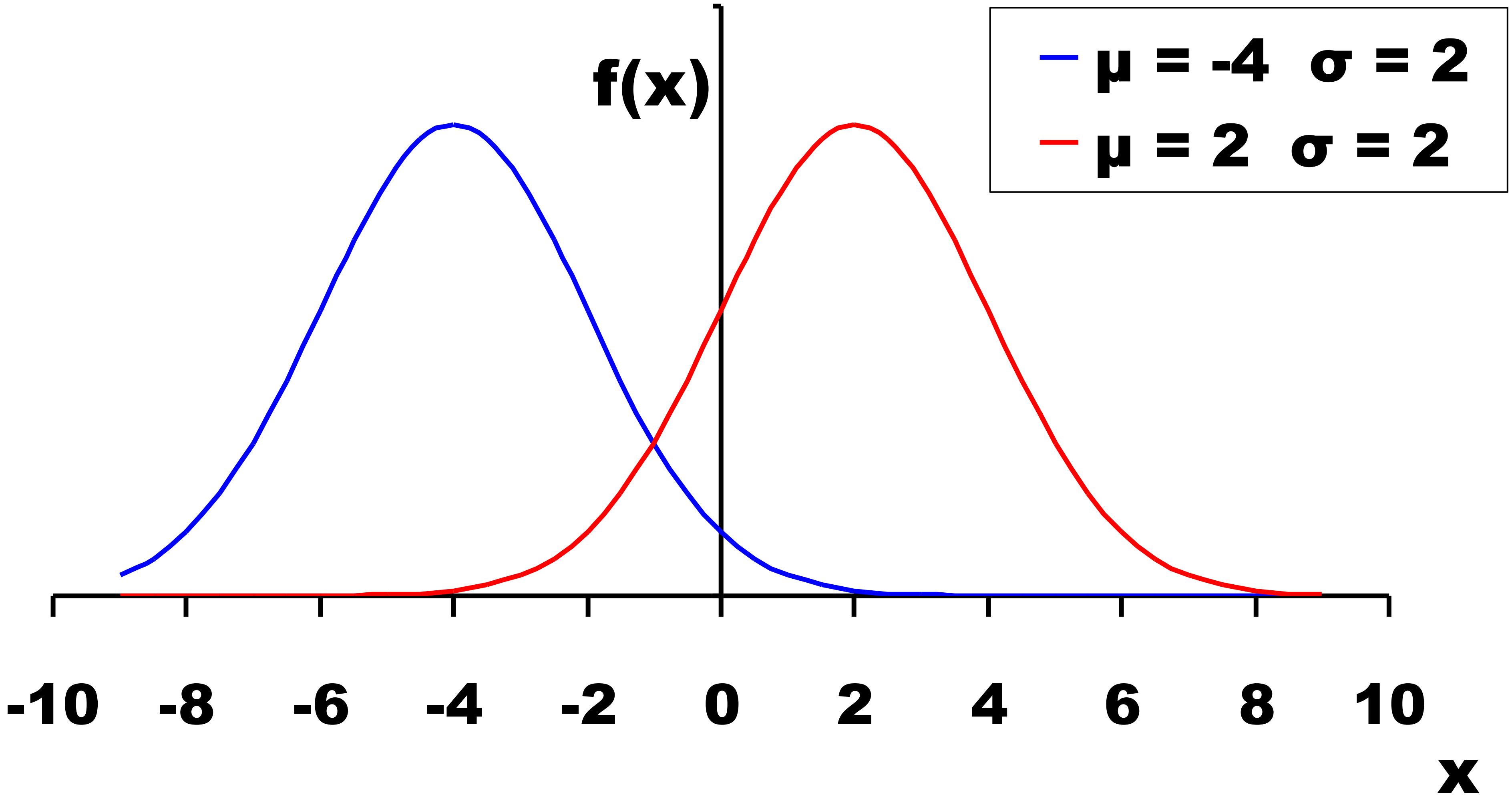
Rozkład normalny – wykres fgp



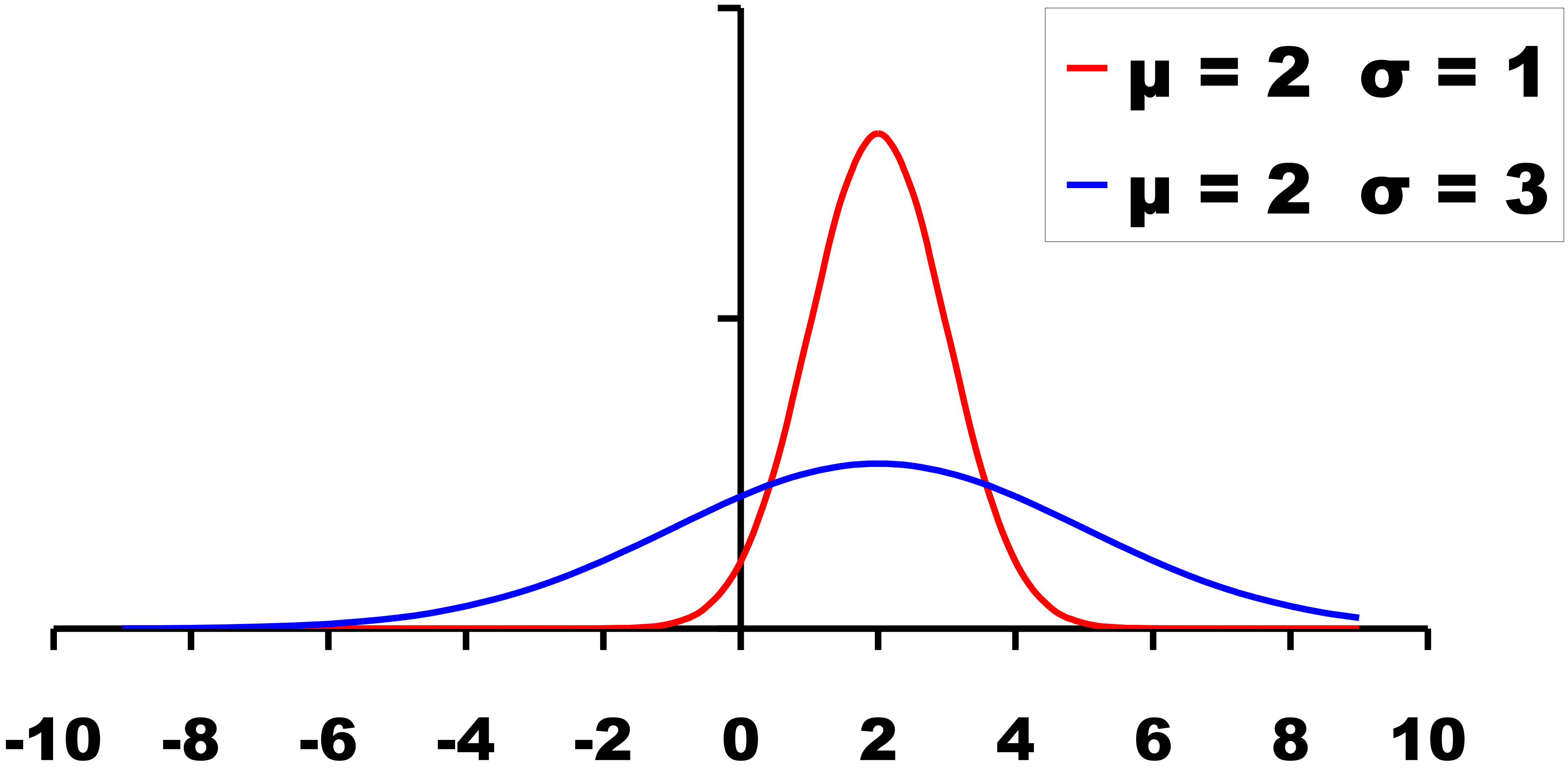
krzywa Gaussa

Własności matematyczne.

Parametr μ



Parametr σ



Oznaczenia

Wyrażenie:

zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2

zapisujemy:

$$X \sim N\,(\mu, \sigma^2)$$

<u>Definicja.</u> Mówimy, że zmienna losowa Z ma rozkład normalny standardowy, jeśli $\mu = 0, \sigma = 1$.

Zapisujemy:

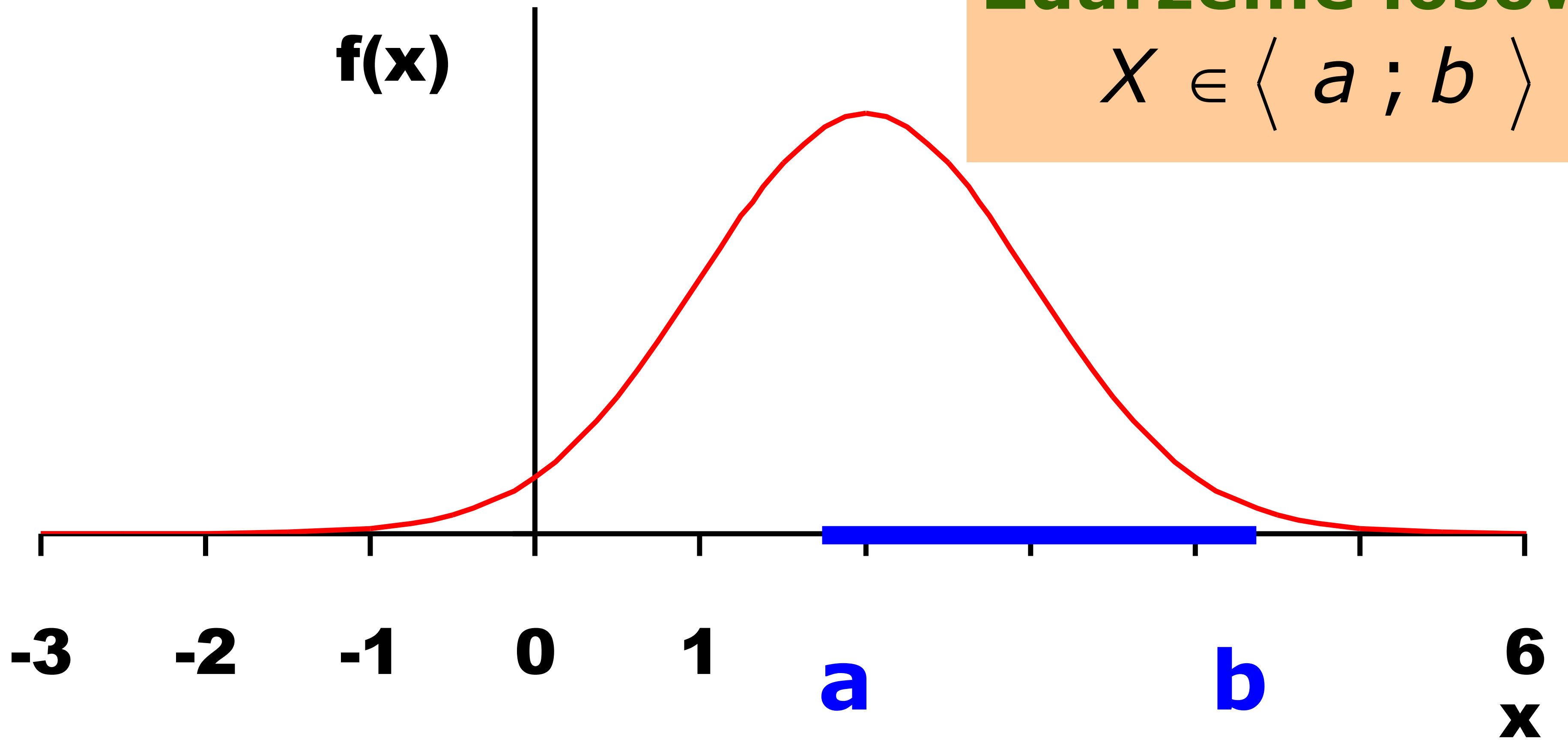
$$Z \sim N\,(0, 1)$$

Zdarzenie losowe

Wykres fgp $y = f\,(x)$

Zdarzenie losowe

$$X \in \langle\, a\,;\, b\,\rangle$$



Zdarzenia losowe - przykłady

Przykłady (przy a < b):

$$X \in (a, b) \qquad X \in \langle a, b \rangle$$

$$X \in \langle a, b) \qquad X \in (a, b \rangle$$

$$X \in (-\infty, a \rangle \qquad X \in (-\infty, a)$$

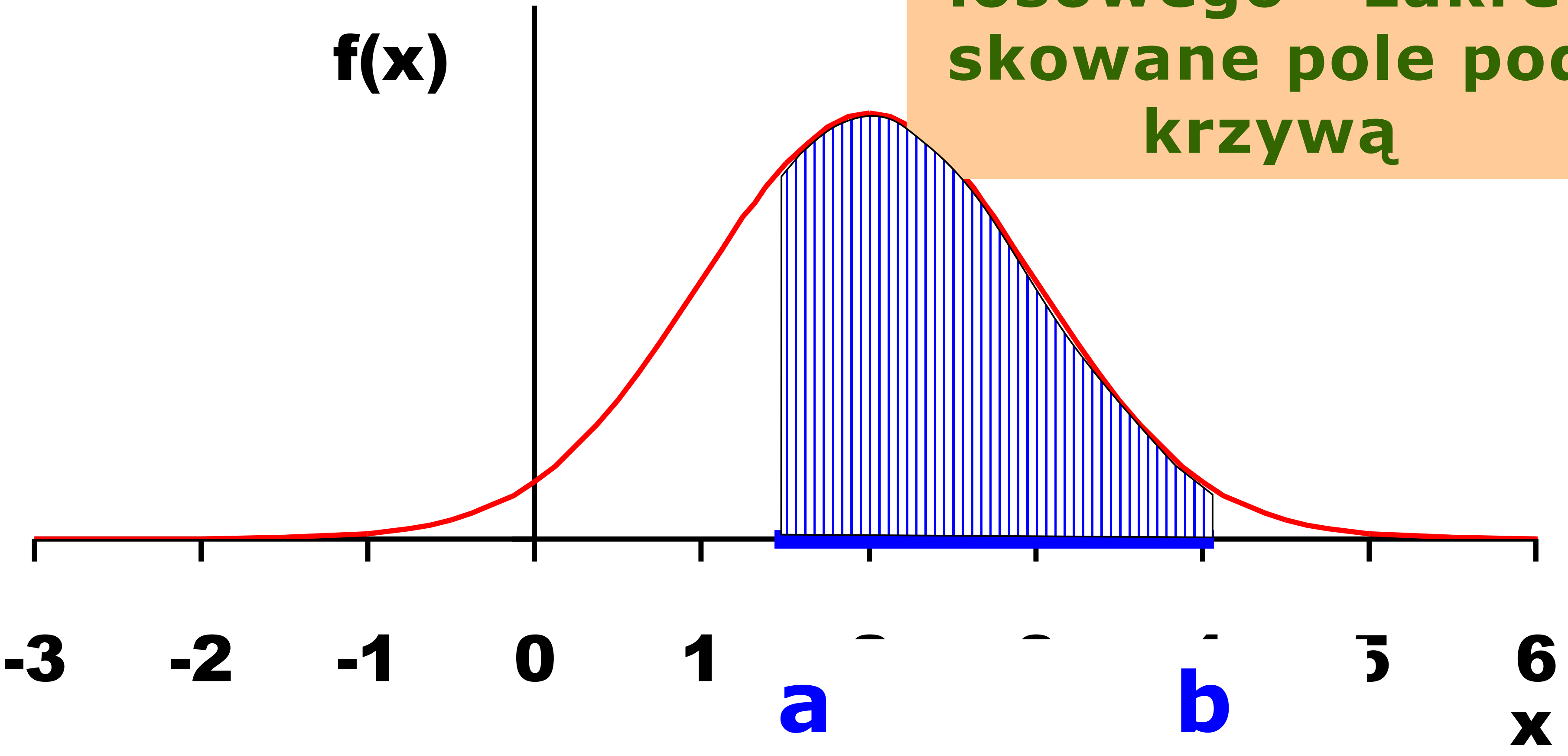
$$X \in (a, +\infty) \qquad X \in \langle a, +\infty)$$

$$X \in \langle a, a \rangle = \{a\}$$

P-stwo zdarzenia losowego

Wykres fgp $y = f(x)$

P-stwo zdarzenia losowego - zakreskowane pole pod krzywą



P-stwo zdarzenia losowego

P-stwo zdarzenia losowego:

$$P\left\{ X \in \langle a, b \rangle \right\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Przypomnienie.

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*, ozn.: $F_X(t)$

$$F_X(t) \overset{def}{=} P\left\{ X \le t \right\} = \cdots$$

P-stwo zdarzenia losowego

P-stwo zdarzenia losowego:

$$P\{X \in \langle a, b \rangle\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Przypomnienie.

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*, ozn.: $F_X(t)$

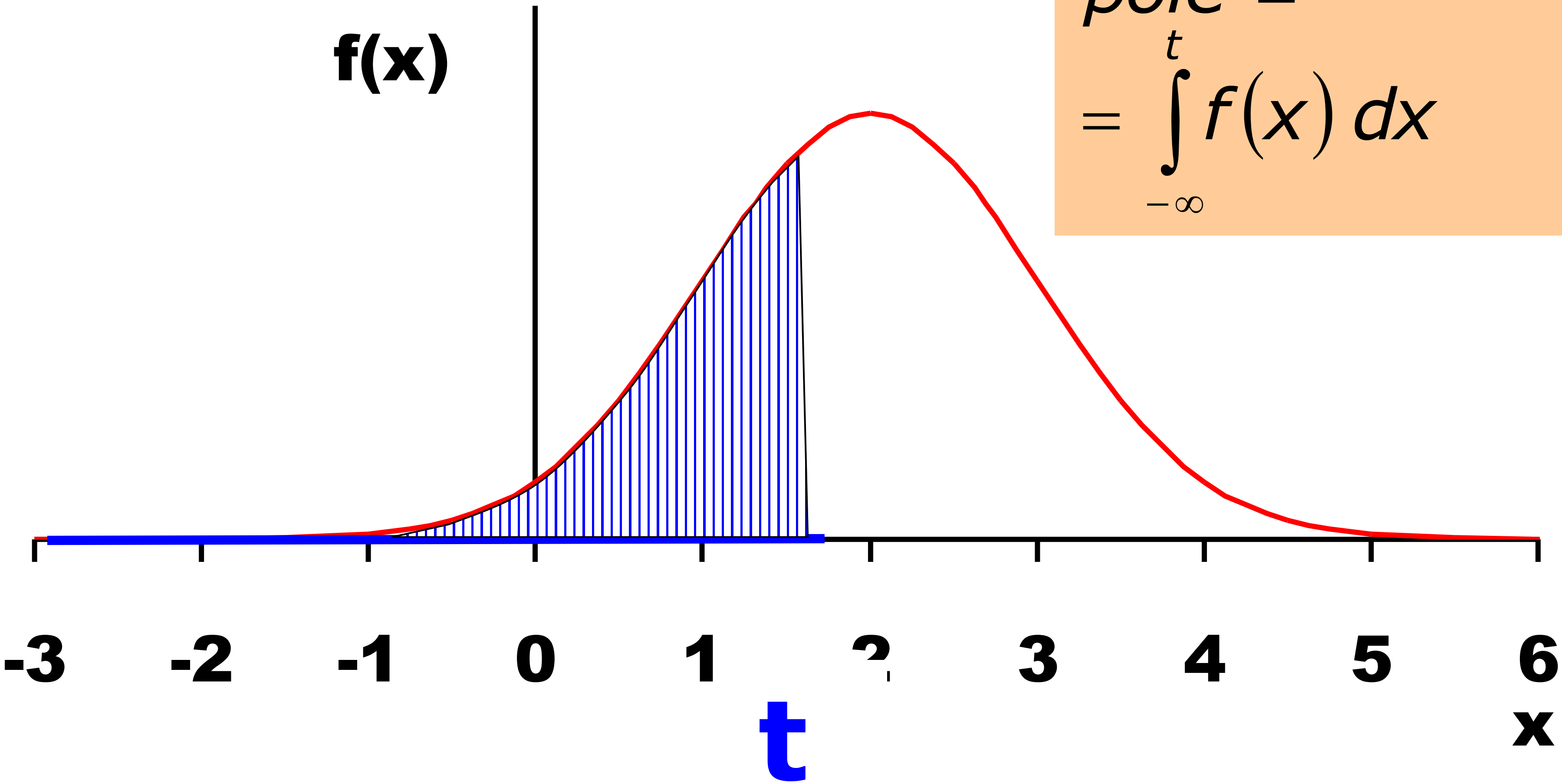
$$F_X(t) \overset{def}{=} P\{X \le t\} = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Dystrybuanta na wykresie fgp

Wykres fgp $y = f\,(x)$

zakreskowane pole $=$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$



Tablice statystyczne

Tablica dystrybuanty $F_Z(x)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	$\boxed{0,74857}$	0,75175	0,75490
:										
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Zadania.

Wzory

Wyznaczanie wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego przy użyciu tablic:

Jeśli $Z \sim N\ (0, 1)$, $a > 0$, to:

$$F_Z\,(-\,a) = 1 - F_Z\,(a) \qquad (1)$$

Wzór na standaryzację zmiennej losowej:

Jeśli $Z \sim N\ (0, 1)$, $X \sim N\ (\mu, \sigma^2)$, to:

$$F_X\,(x_0) = F_Z\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) \qquad (2)$$

* Prawo trzech sigm

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, to:

$$P\left\{ X \in \left\langle \mu - \sigma \,;\, \mu + \sigma \right\rangle \right\} \approx 0{,}68$$

$$P\left\{ X \in \left\langle \mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma \right\rangle \right\} \approx 0{,}95$$

$$P\left\{ X \in \left\langle \mu - 3\sigma \,;\, \mu + 3\sigma \right\rangle \right\} \approx 0{,}9973$$

Rysunek na tablicy.

Charakterystyki rozkładu

Nazwy i oznaczenia:

nazwa:	średnia	wariancja	odchylenie standardowe
ozn.:	EX, μ	D^2X, σ	$\sqrt{D^2X}$, σ

Wzory dla rozkładu ciągłego

X **- zmienna losowa ciągła,**
y **=** ***f*** **(*****x*****) funkcja gęstości**

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$D^2X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2\, f(x)\, dx$$

Wzory dla rozkładu normalnego

$$EX = \mu$$

$$D^2X = \sigma^2$$

* Rozkład chi – kwadrat

Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są:

- **niezależne**
- **$X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$**

to

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

jest zmienną losową o rozkładzie χ^2 z liczbą stopni swobody n.

Ozn. χ^2 czytamy: chi-kwadrat

* Rozkład chi – kwadrat cd.

Funkcja gęstości dla rozkładu χ^2:

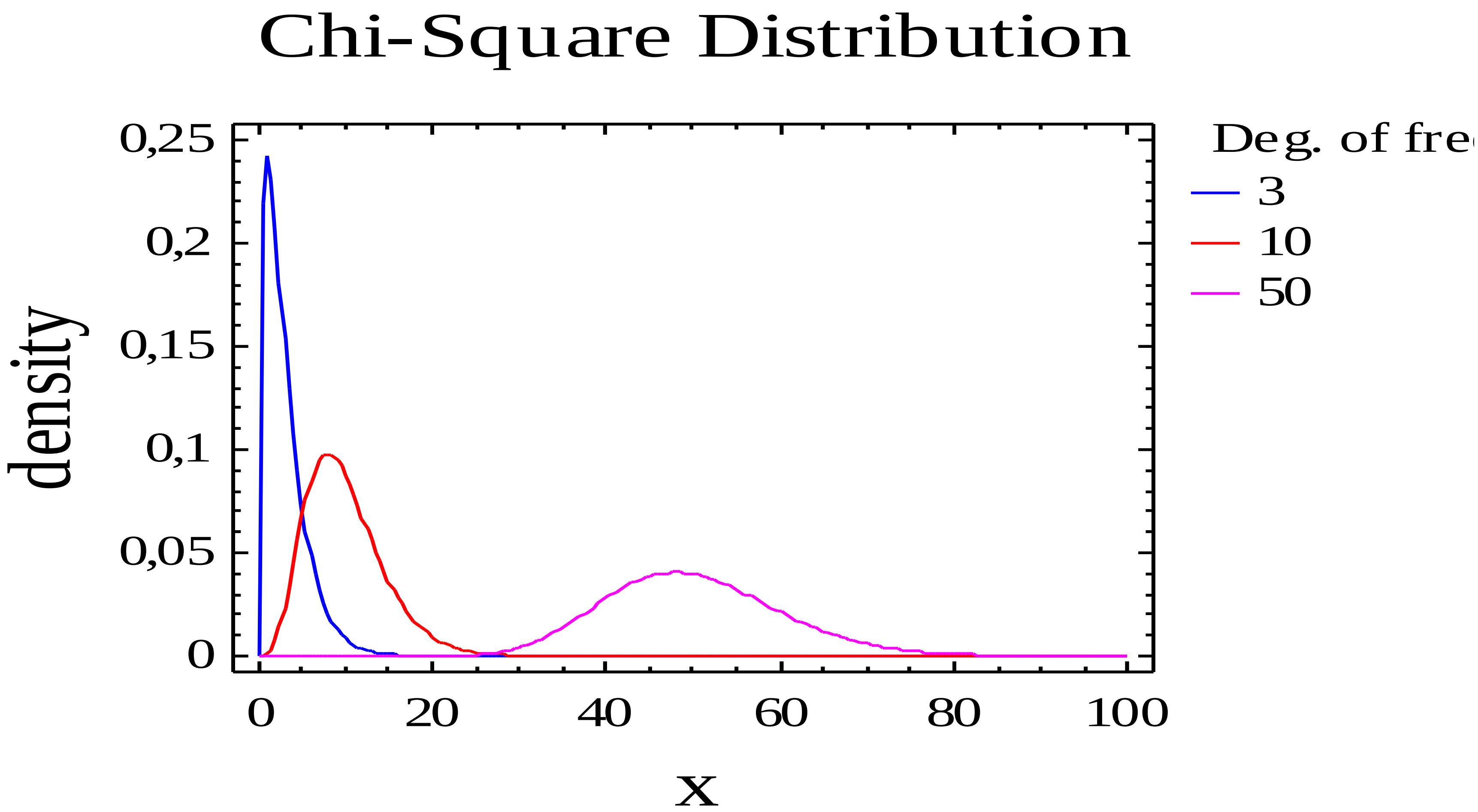
$$f(x) = \begin{cases} 0, & dla\ x \le 0, \\ 2^{-\frac{n}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2}\right) x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & dla\ x > 0 \end{cases}$$

gdzie:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} u^{t-1} e^{-u}\, du, \qquad t \in R_+$$

* Rozkład chi – kwadrat cd.

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu χ^2:



* Rozkład t-Studenta

Jeśli zmienne losowe X_0, X_1, …, X_n są:

- **niezależne**
- **$X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$**

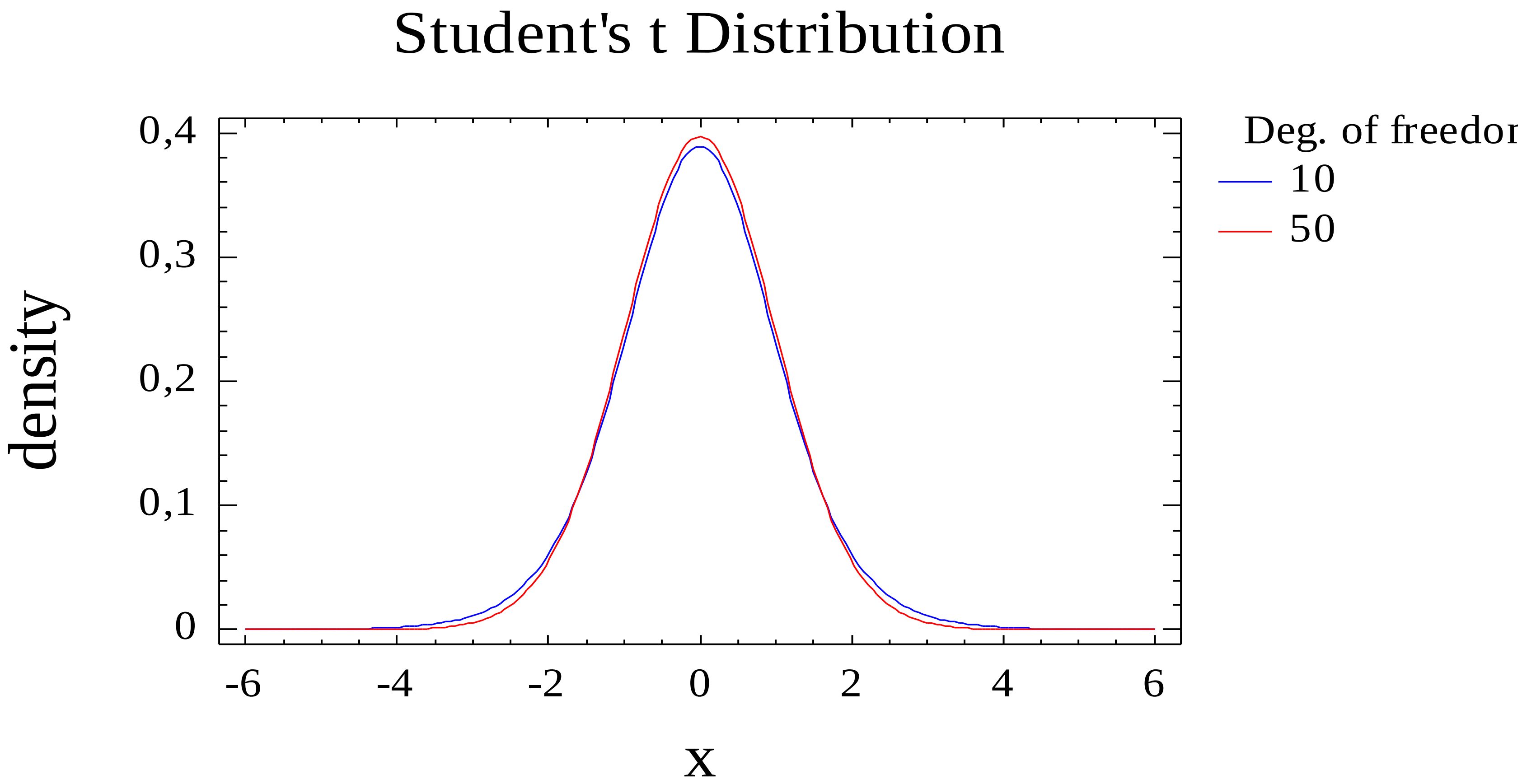
to

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right)}}$$

jest zmienną losową o rozkładzie *t*-Studenta z liczbą stopni swobody *n*.

* Rozkład t-Studenta cd.

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu *t*-Studenta:



* Rozkład *F* Fishera – Snedecora

Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ są:

- **niezależne**
- **$X_i, Y_j \sim N(0, 1)$**

to

$$\frac{\frac{1}{n}\left(X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+\ldots+X_n^{\ 2}\right)}{\frac{1}{m}\left(Y_1^{\ 2}+Y_2^{\ 2}+\ldots+Y_m^{\ 2}\right)}$$

jest zmienną losową o rozkładzie *F* Fishera – Snedecora z liczbami stopni swobody *n* i *m*.

* Rozkład *F* Fishera – Snedecora

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu *F*