Temat wykładu:

Całka nieoznaczona

<u>Kody kolorów:</u>

żółty – nowe pojęcie
pomarańczowy – uwaga
kursywa – komentarz
** – materiał nadobowiązkowy*

Zagadnienia

1. Terminologia i oznaczenia
2. Wzory na całki znanych funkcji
3. Reguły całkowania
4. Przykłady

Idea różniczkowania funkcji

Było:

dana funkcja		szukana pochodna
f	$\longrightarrow$	$f\,'$

różniczkowanie funkcji (wyznaczanie pochodnej)

Przykład. $f\,(x) = x^2, \quad f\,'(x) = 2x$

Idea całkowania funkcji

Teraz:

dana pochodna $\longrightarrow$ **szukana funkcja**

całkowanie funkcji

Przykład. $(\ ?\ )' = 2x$

Odp.: $f(x) = x^2$

Oznaczenia

Dla poprzedniego przykładu:

dana (pochodna) $2x$, szukana (funkcja) x^2

nowy zapis:

dana: $g(x) = 2x$, szukana: $G(x) = x^2$

Terminologia

dana
g

funkcja

szukana
G

funkcja pierwotna

G taka, że $G' = g$

całkowanie funkcji

Przykład

Można zgadnąć, jaki jest wzór funkcji, której pochodna dana jest wzorem $g(x) = 2x$.

Przykład

Można zgadnąć, jaki jest wzór funkcji, której pochodna dana jest wzorem $g(x) = 2x$.

$$G_1(x) = x^2$$

$$G_2(x) = x^2 + 1$$

$$G_3(x) = x^2 - 3{,}5,\ \text{itp.}$$

Przykład

Można zgadnąć, jaki jest wzór funkcji, której pochodna dana jest wzorem $g(x) = 2x$.

$$G_1(x) = x^2$$

$$G_2(x) = x^2 + 1$$

funkcja pierwotna

$$G_3(x) = x^2 - 3{,}5, \text{ itp.}$$

Wynik nie jest jednoznaczny, można podać wiele takich funkcji.

Terminologia

Rodzinę funkcji pierwotnych można zapisać wzorem $x^2 + c,\ c \in R$.

Tę rodzinę funkcji pierwotnych nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $g(x)=2x$.

Oznaczenia

Zadanie całkowania funkcji:

$g(x) \longrightarrow G(x)$, gdzie $G'(x)=g(x)$

Zapisujemy: $$\int \underbrace{g(x)}_{\text{funkcja podcałkowa}}\,dx = \underbrace{G(x)+c}_{\text{rodzina funkcji pierwotnych}}, \quad c \in R$$

Czytamy: całka z funkcji g od x po dx

Sprawdzamy: $G'(x) = g(x)$

Przykład 1

Odgadnij i zapisz całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = 2x + 1$.

Przykład 1 cd.

$$\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c, \quad c \in R$$

$$\text{spr.:} \quad \left(x^2 + x + c\right)' = 2x + 1$$

Przykład 2

Odgadnij

$$\int \left(3x^2 + 2x\right) dx$$

Przykład 2 cd.

$$\int \left(3x^2 + 2x\right)dx = x^3 + x^2 + c, \quad c \in R$$

$$\text{spr.:} \quad \left(x^3 + x^2 + c\right)' = 3x^2 + 2x$$

Przykłady

Odgadnij całki. Sprawdź wyniki.

a) $\int 3x^2 a\,dx =$

b) $\int 3x^2 a\,da =$

Przykłady cd.

Odgadnij całki. Sprawdź wyniki.

a) $\int 3x^2 a\,dx = x^3 a + c, \quad c \in R$

b) $\int 3x^2 a\,da = \frac{3}{2} x^2 a^2 + c, \quad c \in R$

Wzory

Wzory

Całka funkcji stałej

$$\int 1\,dx = \int dx = x + c, \quad c \in R$$

spr.: $\left(x+c\right)' = 1$

Wzory cd.

Całka funkcji potęgowej

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad c \in R, \quad \alpha \in R - \{-1\}$$

Przykłady

Przykłady

$$\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in R$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c, \quad c \in R$$

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c, \quad c \in R$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c, \quad c \in R$$

Przykłady

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c, \quad c \in R$$

Wzory cd.

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \quad c \in R$$

Wzory cd.

Całka funkcji wykładniczej

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, \quad c \in R$$

Przykłady

Przykłady

$$\int 5^x \, dx = \frac{1}{\ln 5} 5^x + c, \quad c \in R$$

$$\int e^x \, dx = \frac{1}{\ln e} e^x + c = e^x + c, \quad c \in R$$

Wzory cd.

Całki funkcji trygonometrycznych

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

*Wzory cd.

Całki funkcji trygonometrycznych

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

*Wzory cd.

Całki funkcji wymiernych

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right| + c, \quad a \neq 0$$

*Wzory cd.

Całki funkcji niewymiernych

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + c$$

Reguły całkowania

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx, \quad a - \text{stała}, \quad a \in R$$

Krótszy zapis:

$$\int a \cdot f = a \cdot \int f, \quad a - \text{stała}, \quad a \in R$$

Jeśli funkcja podcałkowa ma postać iloczynu stałej a i funkcji $f(x)$, to stałą a można wyłączyć przed znak całki.

Przykłady

Przykłady

$$\int 5\,dx = 5 \cdot \int 1\,dx = 5 \cdot x + c = 5x + c, \quad c \in R$$

$$\int \left(-3x^4\right) dx = (-3) \cdot \int x^4\,dx = (-3) \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + c =$$

$$= -\tfrac{3}{5} x^5 + c, \quad c \in R$$

$$\int \frac{e^x}{3}\,dx = \int \tfrac{1}{3} e^x\,dx = \tfrac{1}{3} \cdot \int e^x\,dx = \tfrac{1}{3} e^x + c, \quad c \in R$$

Reguły całkowania cd.

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Krótszy zapis:

$$\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$$

Całka z sumy (różnicy) funkcji $f(x)$ i $g(x)$ jest równa sumie (różnicy) całek z tych fukcji.

Przykłady

Przykłady

$$\int \left(3x^2 + 2x - 5\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int 2x\, dx - \int 5\, dx =$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} x^2 - 5 \cdot x + c = x^3 + x^2 - 5x + c,$$

$$c \in R$$

$$\int \left(4e^x - \tfrac{1}{3x}\right) dx = \int 4e^x\, dx - \int \tfrac{1}{3x}\, dx =$$

$$= 4\int e^x\, dx - \tfrac{1}{3}\int \tfrac{1}{x}\, dx = 4e^x - \tfrac{1}{3} ln|x| + c, \quad c \in R$$

Reguły całkowania cd.

Wzór na całkowanie przez części

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Krótszy zapis:

$$\int f'\cdot g = f\cdot g - \int f\cdot g'$$

Przykłady

Przykład 1

Oblicz $\int xe^x \, dx$

Oznaczamy:

$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$g(x) = x$	$g'(x) = 1$

UWAGA. Wyrażenia zapisane na białych polach wynikają z przyjętego oznaczenia, natomiast wyrażenia na barwnych polach trzeba wyznaczyć samodzielnie.

$$\int xe^x \, dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx = xe^x - e^x + c, \quad c \in R$$

spr.:...

Przykład 2

Oblicz $\int x \ln x \, dx$

Oznaczamy:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	$f'(x) = x$
$g(x) = \ln x$	$g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + c = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c, \quad c \in R$$

spr.:...

Reguły całkowania cd.

Wzór na całkowanie przez podstawienie

$$\int f[g(x)]\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

podst.: $g(x) = t$

Przykłady

Przykład 1

Oblicz całkę $\int \frac{1}{x+3}\,dx$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c$$

Stosujemy podstawienie: $x+3 = t$

Różniczkujemy stronami: $(x+3)_x{}' = (t)_t{}'$

$1 \cdot dx = 1 \cdot dt$

$dx = dt$

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c = \ln|x+3| + c,\ c \in R$$

Przykład 2

Oblicz całkę $\int \sqrt{3x+2}\, dx$

$$\int \sqrt{t}\; dt = \tfrac{2}{3} t\sqrt{t} + c, \quad c \in R$$

Stosujemy podstawienie: $3x+2 = t$

Różniczkujemy stronami: $(3x+2)_x' = (t)_t'$

$$3 \cdot dx = 1 \cdot dt$$

$$3 \cdot dx = dt$$

$$dx = \frac{1}{3} \cdot dt$$

Przykład 2 cd.

$$\int \sqrt{3x+2}\, dx = \int \sqrt{t} \cdot \tfrac{1}{3}\, dt = \tfrac{1}{3} \int \sqrt{t}\, dt =$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\, t\sqrt{t} + c = \tfrac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + c, \quad c \in R$$

* Reguły całkowania cd.

Wzór na pochodną logarytmiczną

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \quad c \in R$$

* Przykład

Oblicz całkę $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

* Przykład

W mianowniku występuje wyrażenie

$$f(x) = x^2 + 3x$$

natomiast w liczniku jego pochodna

$$f'(x) = 2x + 3$$

Korzystając ze wzoru na pochodną logarytmiczną otrzymujemy

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln\left|x^2+3x\right| + c, \quad c \in R$$