

## CAŁKI

Funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$  w przedziale  $a < x < b$  nazywamy każdą taką funkcję  $F(x)$ , której pochodna  $F'(x)$  równa się tej funkcji.

Dwie funkcje, które w tym samym przedziale mają tę samą pochodną mogą się różnić o stałą.

Całka nieoznaczona funkcji  $f(x)$  po  $dx$ :

$$\int f(x)dx$$

Jeżeli

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

to funkcję  $F(x)$  nazywamy funkcją pierwotną, a  $C$  stałą oraz

$$F'(x) = f(x).$$

Stała  $C$ :

Jeżeli pochodna funkcji jest równa  $3x^2$ , to funkcja może mieć wzór  $x^3 + 4$  lub  $x^3 - 1$  lub w ogólności  $x^3 + C$ .

Wzory rachunku całkowego:

- $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$

np.

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

ale

- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Własności całek:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

Przykłady:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2} dx &= \int \left( x^{\frac{1}{2}-2} - x^{\frac{1}{3}-2} \right) dx = \int \left( x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{5}{3}} \right) dx = \\ &= \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int x^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + C = \\ &= -2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C\end{aligned}$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x - 3 \\ t' = \frac{dt}{dx} = 2 \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2(2x-3)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{2x-3} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5x-1} dx &= \int \frac{dx}{5x-1} = \left\{ \begin{array}{l} t = 5x - 1 \\ t' = \frac{dt}{dx} = 5 \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\frac{1}{5} dt}{t} = \frac{1}{5} \int t^{-1} dt = \frac{1}{5} \ln|t| + C = \frac{1}{5} \ln|5x-1| + C\end{aligned}$$

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \int e^t \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

\*Całkowanie przez części

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - du \cdot v$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = e^x dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx \\ v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$