Zastosowanie POCHODNEJ

Badanie przebiegu zmienności funkcji

- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest każdym punkcie pewnego przedziału równa zeru, to funkcja jest w tym przedziale stała
- Jeżeli funkcja posiada w pewnym punkcie ekstremum lokalne, to pochodna funkcji w tym punkcie równa się zeru.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni to funkcja osiąga minimum.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny to funkcja osiąga maksimum.

Reguła de L'Hospitala:

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $(a, b]$, kiedy

  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$$
  $$\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

  lub

  $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$
  $$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$$

  oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

  $$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

  a także

  $$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[a, b)$, kiedy

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[b, \infty)$, kiedy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

Przykład 1. Policzyć granicę: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{-1/x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2/x^3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1/e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

Przykład 2. Zbadać monotoniczność funkcji:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$$

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja nie posiada asymptot.

$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = \infty$

- Obliczamy pochodną:

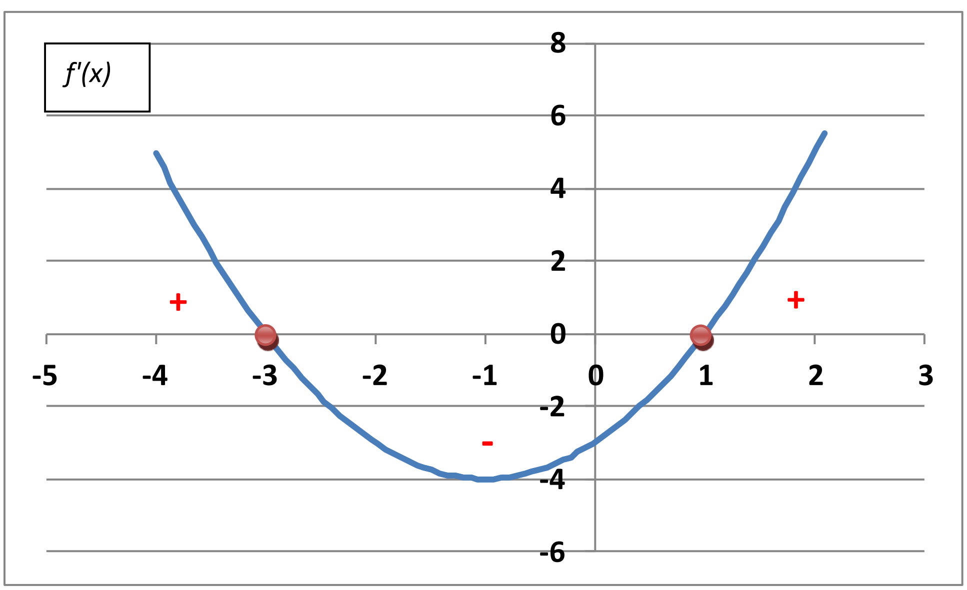
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Przyrównujemy pochodną do zera w calu znalezienia ekstremów lokalnych funkcji:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ oraz } x = 1$$



Ekstrema lokalne są dla wartości zmiennej $x = -3$ oraz $x = 1$.

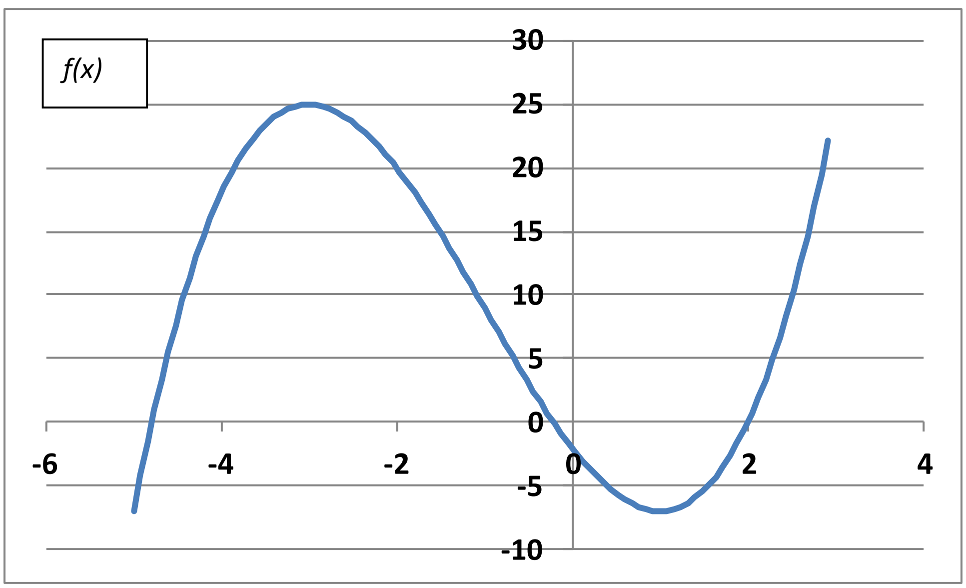
W przedziale $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (1, \infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tych przedziałach rosnąca.

W przedziale $x \in (-3,1)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$\boldsymbol{f'(x)}$	∞	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$-\infty$	$\nearrow$	25	$\searrow$	-7	$\nearrow$	∞

Oraz wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$:



Przykład 3. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{lnx}$$

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich bez liczby 1: $x \in (0{,}1) \cup x \in (1, +\infty)$.
- Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Badamy istnienie asymptot:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{lnx} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{lnx} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{lnx} = +\infty$$

Istnieje asymptota pionowa obustronna $x = 1$.

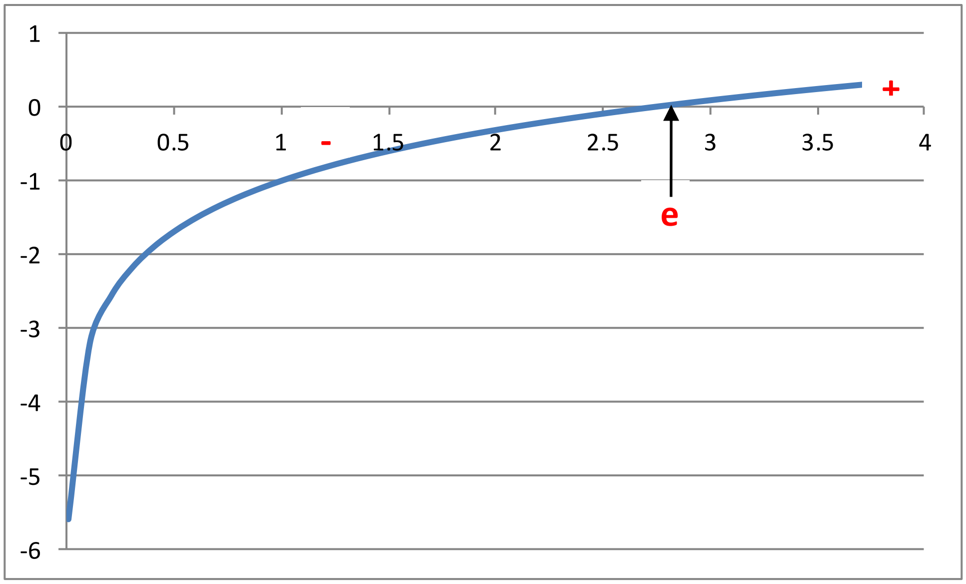
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{lnx} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(lnx)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Sprawdzamy istnienie ekstremów i wyznaczamy przedziały monotoniczności:

$$\left(\frac{x}{lnx}\right)' = \frac{(x)'lnx - x(lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{lnx - x\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{lnx - 1}{(lnx)^2}$$

$lnx - 1 = 0 \to lnx = 1 \to x = e$

$f(e) = e$



W przedziale $x \in (0, e)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

W przedziale $x \in (e, +\infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale rosnąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0^+}$	$\cdots$	$\mathbf{1^-}$	$\mathbf{1^+}$	$\cdots$	$\boldsymbol{e}$	$\cdots$	$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{0}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\boldsymbol{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Przykład 4. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-x}}$$