WYRAŻENIA NIEOZNACZONE

Przy liczeniu granicy ciągu lub funkcji można otrzymać następujące wyrażenia nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\quad [0\cdot\infty],\quad [\infty^0],\quad [1^\infty],\quad [0^0]$$

Przykład:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^3$$

Natomiast oznaczone są następujące wyrażenia (a dowolna dodatnia liczba rzeczywista $a\epsilon R_+$):

$$[+\infty + a] = \infty$$

$$[-\infty + a] = -\infty$$

$$[+\infty - a] = \infty$$

$$[-\infty - a] = -\infty$$

$$[+\infty \cdot a] = \infty$$

$$[-\infty \cdot a] = -\infty$$

$$[+\infty \cdot (-a)] = -\infty$$

$$[-\infty \cdot (-a)] = +\infty$$

$$[+\infty \cdot (+\infty)] = \infty$$

$$[-\infty \cdot (-\infty)] = \infty$$

$$[+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$$

$$[-\infty \cdot (+\infty)] = -\infty$$

$$\left[\frac{a}{+\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\frac{a}{-\infty}\right] = 0^-$$

$$\left[\frac{-a}{+\infty}\right] = 0^-$$

$$\left[\frac{-a}{-\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\frac{a}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\left[\frac{a}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\left[\frac{-a}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\left[\frac{-a}{0^-}\right] = +\infty$$

$$[\infty^a] = \infty$$

$$[\infty^\infty] = \infty$$

gdzie symbol $[0^+]$ oznacza granicę funkcji o wartościach dodatnich, która wynosi zero, a symbol $[0^-]$ granicę funkcji o wartościach ujemnych, która wynosi zero.

FUNKCJE

Jeżeli każdej liczbie x z jednego zbioru zostanie przyporządkowana jedna liczba y z drugiego zbioru, to mówimy, że została określona pewna funkcja:

$$y = f(x)$$

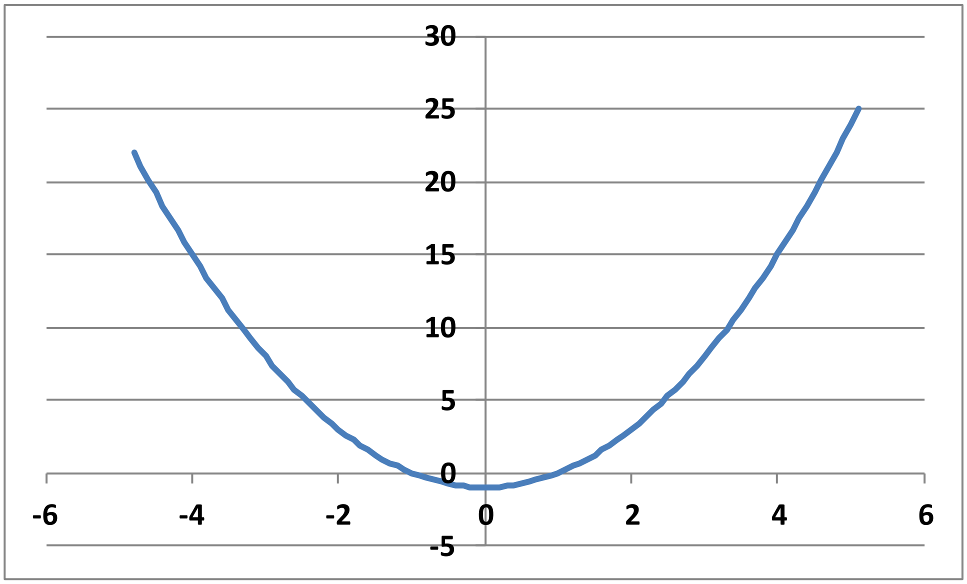
Liczbę x nazywamy argumentem funkcji, a liczbę y wartością funkcji y.

Zbiór argumentów funkcji nazywa się dziedziną funkcji.

Przykład:

$$f(x) = x^2 - 1$$

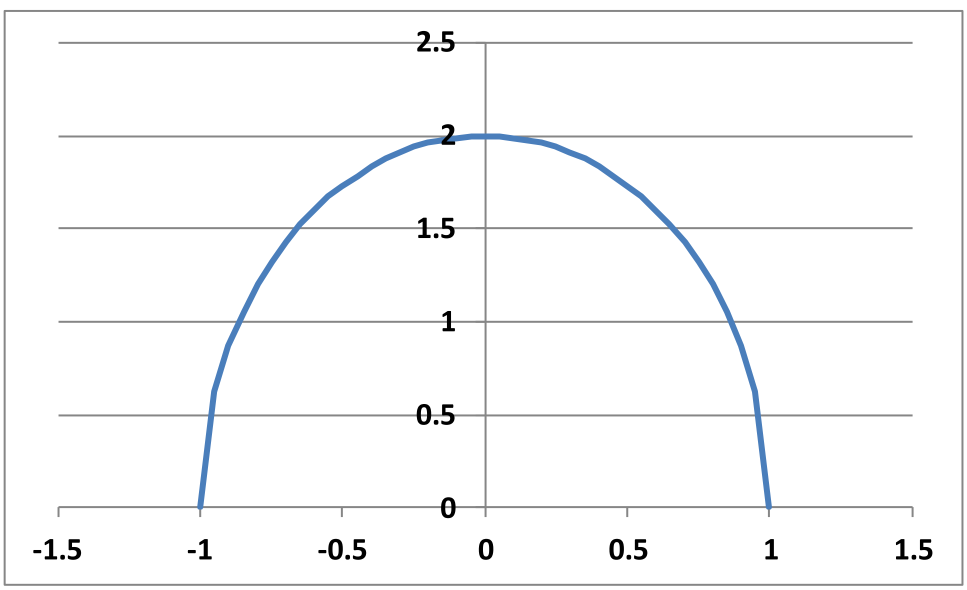
Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, czyli $x \in R$ lub $-\infty < x < \infty$.



Przykład:

$$f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

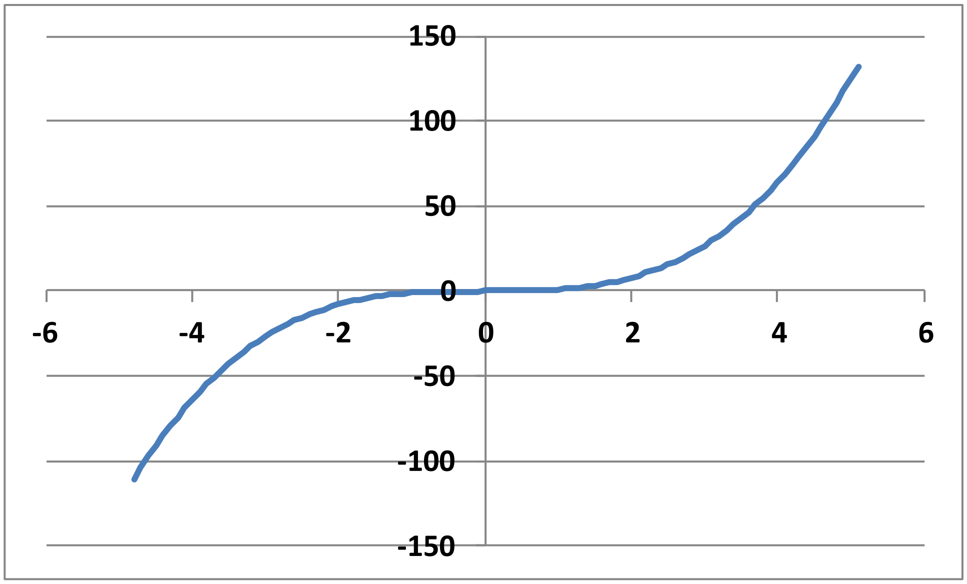
Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych, które $-1 \leq x \leq 1$.



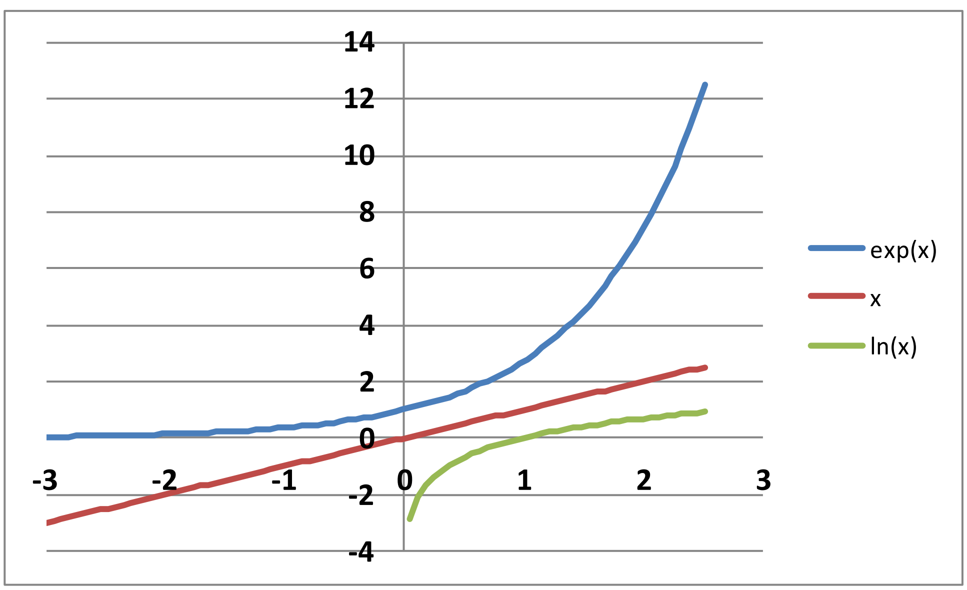
Przykład:

$$f(x) = x^3$$

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, czyli $x \in R$ lub $-\infty < x < \infty$.



Przykład: Funkcja odwrotna



$$exp(x) = e^x$$

$$\ln(x) = lnx = \log_e x$$

GRANICE FUNKCJI

Lewostronna granica funkcji:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Prawostronna granica funkcji:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą w punkcie $x = x_0$, jeśli istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i jest ona równa $f(x_0)$.

Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcje x_0 asymptotę pionową.

Jeżeli $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, to mówimy, że prosta $y = a$ stanowi asymptotę poziomą funkcji $f(x)$.

Przykład: Wyznaczyć granice funkcji $f(x)$ przy $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, oraz w punktach $x = 2$ i $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

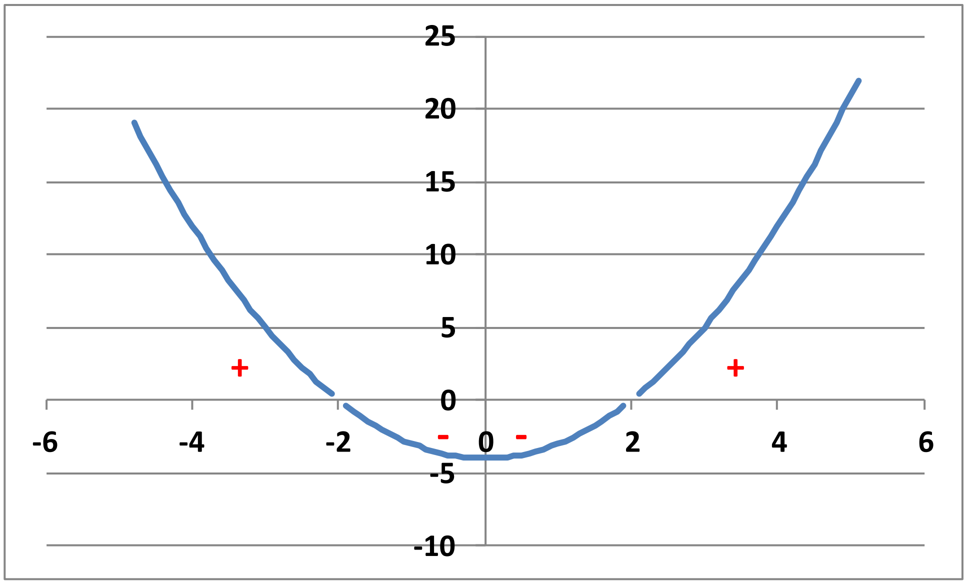
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0$$

$\Rightarrow$ Istnieje asymptota pozioma $y = 0$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$$

Wykres mianownika $f(x) = (x-2)(x+2)$:



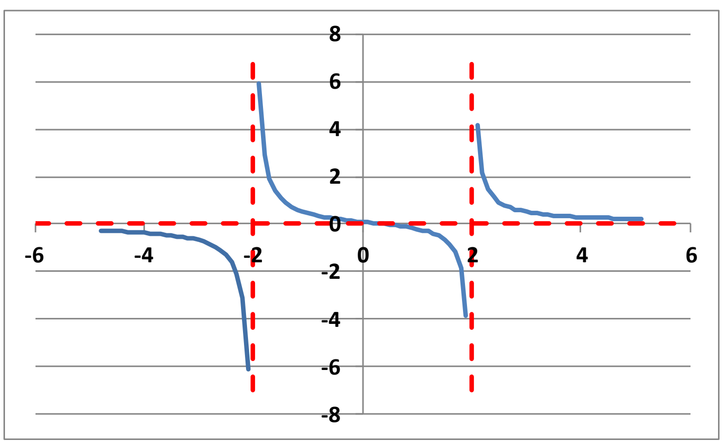
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Istnieją asymptoty pionowe $x = -2$ i $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Przykład:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja nie ma miejsc zerowych. Nie ma takiej wartości x_0, dla której $f(x_0) = 0$.

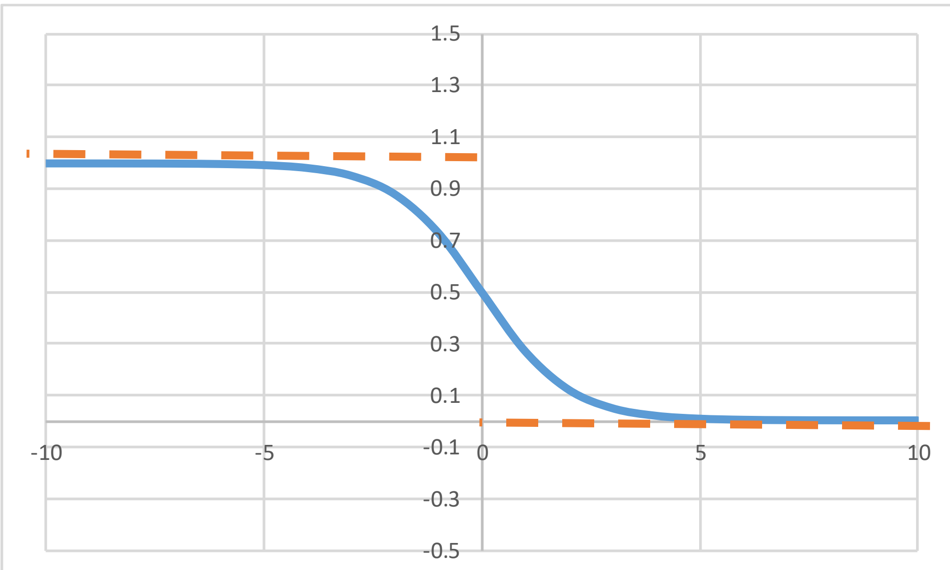
$$f(x=0)=\frac{1}{2}$$

Sprawdzamy istnienie asymptot poziomych:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1}=1$$

Istnieje asymptota pozioma lewostronna $y=1$
i
prawostronna $y=0$.



Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f należących do przedziału (a,b), ale różnych od x_0, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do granicy g. Piszemy wtedy $\lim_{x\to x_0} f(x)=g$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli są spełnione następujące warunki:

x_0 należy do dziedziny funkcji f,

istnieje skończona granica funkcji, przy x dążącym do x_0,

$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Przykład. Funkcja $y=x^2$ jest ciągła w punkcie x_0=2.

x_0 należy do dziedziny funkcji f, $f(2)=4$

istnieje skończona granica funkcji, przy x dążącym do x_0, $\lim_{x\to 2} x^2=4$

$f(2)=\lim_{x\to 2} x^2$