CIĄGI

Jeżeli każdej liczbie naturalnej *n* zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista a_n, to mówimy, że został określony nieskończony ciąg liczbowy. Ciąg zapisuje się w postaci:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ lub $\{a_n\}$

Liczby $a_1, a_2, \dots$ nazywa się wyrazami ciągu $\{a_n\}$, a a_n nazywa się wyrazem ogólnym ciągu.

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g, gdy przy $n \to \infty$, $a_n \to g$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

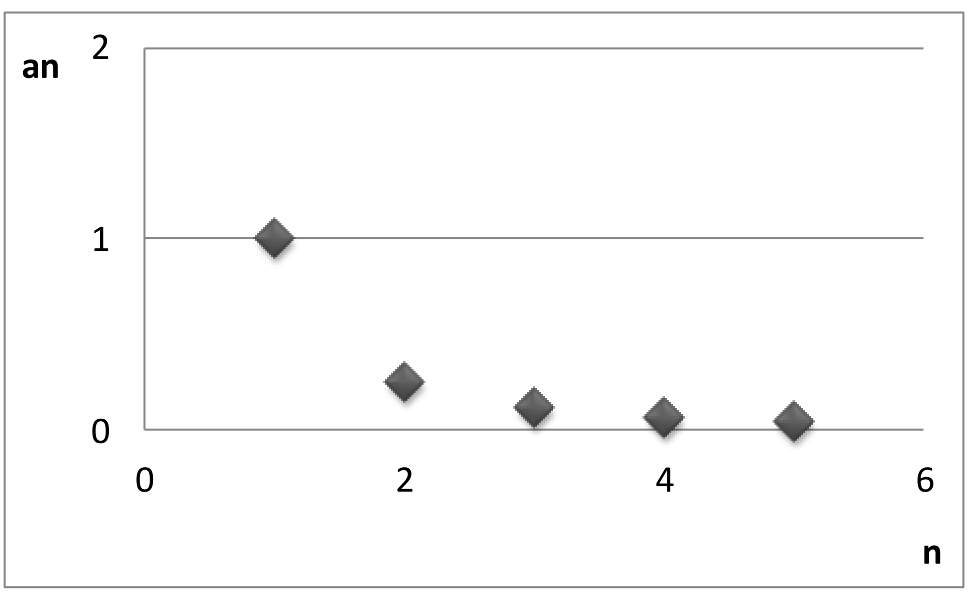
Przykład 1:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\to \infty$
a_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	...	$\to 0$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę 0, gdy $n \to \infty$,

$\frac{1}{n^2} \to 0$, gdy $n \to \infty$, lub $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$



Przykład 2:

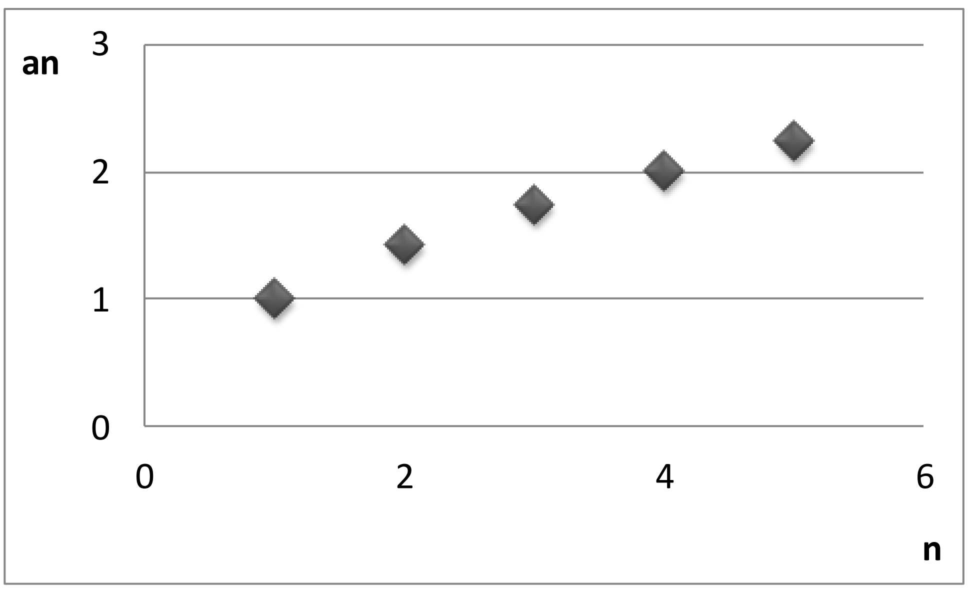
$$a_n = \sqrt{n}$$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\to \infty$
a_n	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	...	$\to \infty$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę ∞, przy $n \to \infty$,

$\sqrt{n} \to \infty$, gdy $n \to \infty$,

lub $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$



Przykład 3:

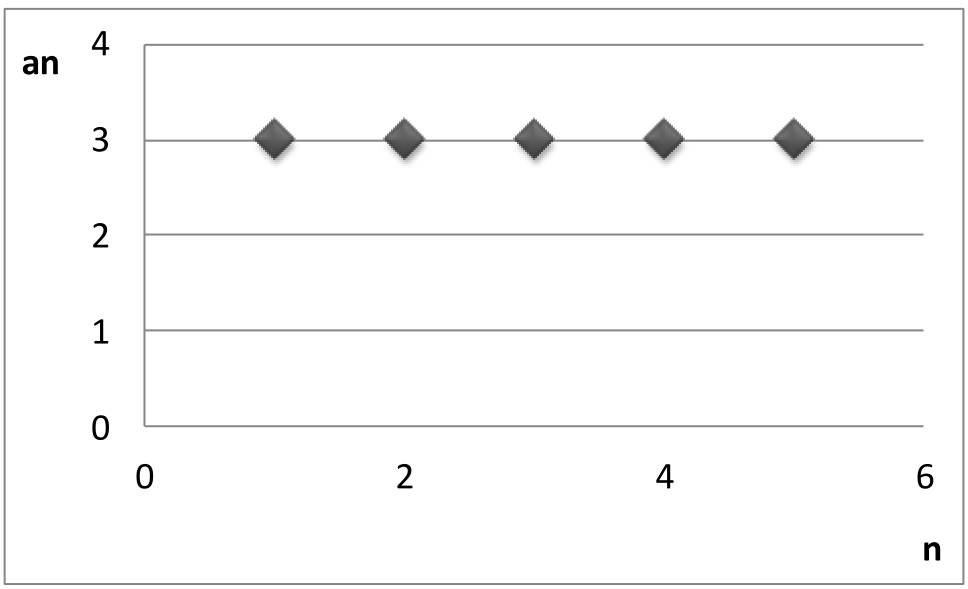
$$a_n = 3$$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\to \infty$
a_n	3	3	3	3	3	...	$\to 3$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę 3, przy $n \to \infty$,

$3 \to 3$, gdy $n \to \infty$,

lub $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$

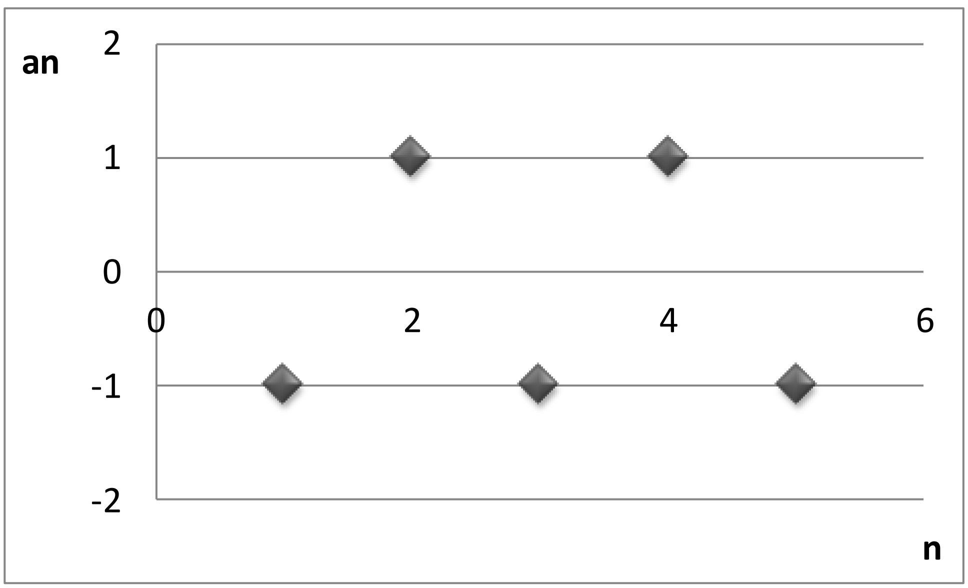


Przykład 4:

$$a_n = (-1)^n$$

n	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\to \infty$
a_n	-1	1	-1	1	-1	...	→?

Ciąg $\{a_n\}$ nie wiadomo jaką ma granicę, gdy $n \to \infty$



Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy ciągiem zbieżnym. Inne ciągi nazywamy rozbieżnymi . Jeśli ciąg dąży do $+\infty$ nazywamy go ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności. Jeśli ciąg dąży do $-\infty$ nazywamy go ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności.

Twierdzenia:

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę *a* i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę *b*, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę *a*+*b*.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę *a* i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę *b*, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę *a*-*b*.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę *a* i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę *b*, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ ma granicę *a*·*b*.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę *a* i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę *b* i żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani jego granica nie równa się zeru, to ciąg ilorazów to ciąg $\{a_n/b_n\}$ ma granicę *a*/*b*.

- Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej n, to granica takiego ułamka przy $n \to \infty$ równa się ilorazowi współczynników przy najwyższych potęgach n.

- Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż licznik, to granica takiego ułamka przy $n \to \infty$ równa się zeru.

- Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż mianownik, to wartość bezwzględna takiego ułamka przy $n \to \infty$ dąży do plus nieskończoności.

- Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = q^n$ ma skończoną granicę równą zeru dla $-1 < q < 1$ oraz równą 1 dla $q = 1$.

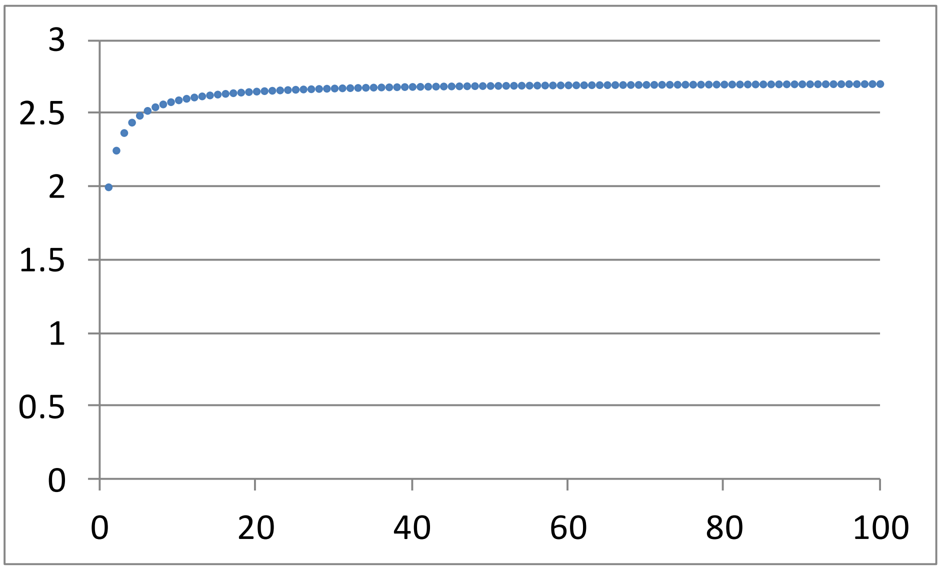
- Twierdzenie o trzech ciągach. Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ spełniają dla dowolnego *n* nierówność $a_n \le b_n \le c_n$ i jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ mają wspólną granicę $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg $\{b_n\}$ ma tę samą granicę, $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdy $a > 0$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

W ogólności wzór ten można zapisać jako: $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$

Liczba *e* to liczba Eulera. Jest niewymierna *e* =2,718281828459...



Przykład 5:

$a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę e^4, gdy $n \to \infty$

Liczba *e* jest podstawą logarytmów naturalnych. Funkcja wykładnicza o podstawie e jest odwrotną do logarytmu naturalnego:

$$lne^x = x$$

$$e^{lnx} = x$$