MACIERZE

Macierz odwrotna:

Macierzą odwrotną A^{-1} macierzy kwadratowej A nazywamy macierz, która spełnia równości:

$$AA^{-1} = I, \qquad A^{-1}A = I$$

Jeżeli macierz kwadratowa A jest macierzą nieosobliwą, tzn. detA≠0, to istnieje do niej dokładnie jedna macierz odwrotna A^{-1}.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$M = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych:

Układ n równań liniowych:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Może zostać zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Odpowiada to zapisowi: $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywa się macierzą współczynników układu.

Macierz X to macierz to macierz niewiadomych.

Macierz B, to macierz

Układ równań liniowych jest układem Cramera, gdy

- Liczba równań jest równa liczbie jego niewiadomych

- Wyznacznik główny (macierzy współczynników układu) jest różny od zera

Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to mnożąc stronami przez A^{-1} otrzymujemy:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

PRZYKŁAD:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

Macierz współczynników:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = -14$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{13}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & -\frac{19}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{13}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} & -\frac{19}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} \\ -\frac{10}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{10}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases}$$