MACIERZE

RZĄD MACIERZY

- Operacje elementarne na wierszach macierzy

Na wierszach (kolumnach) macierzy można wykonywać operacje dodawania odejmowania i mnożenia przez liczbę. Na przykład można dodać do jednego wiersza macierzy inny wiersz pomnożony przez liczbę.

Rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[w_3=[0,6,-2]-2[0,3,-1]=[0,0,0]]{w_3=w_3-2w_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(A)=2

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[w_3=[2,6,-2]-2[0,3,-1]=[0,0,0]]{w_3=w_3-2w_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(B)=3

Własności rzędu macierzy:

- rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,
- rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n,
- rząd macierzy A^T, jest równy rzędowi macierzy A,
- rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,
- jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,
- jeśli dowolny wiersz (kolumnę) macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza (kolumny) to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli zamienimy dwa wiersze (kolumny) między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

WYZNACZNIK MACIERZY

Każdej macierzy kwadratowej A przyporządkowujemy jednoznacznie liczbę tzw. wyznacznik macierzy A (ang. determinant):

$$detA_{n\times n} = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jeżeli wyznacznik macierzy $detA$ =0, to macierz A nazywamy osobliwą.

Reguły obliczania wyznacznika:

$$det[a] = |a| = a$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21})$$

Reguła Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} \\ a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} \\ a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} \\ a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} \\ a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} \end{matrix}$$

$$\overline{a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21}} \qquad \overline{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}}$$

Obliczanie wartości wyznaczników wyższych rzędów - Metoda Laplace'a

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} det A_{ij}$$

gdzie,

i - jest ustalone i określa wiersz macierzy, względem którego następuje rozwinięcie

a_{ij} - jest elementem macierzy w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

A_{ij} - jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}

Rozwinięcie według elementów <u>drugiego</u> wiersza:

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$+a_{2n} \cdot (-1)^{2+n} \cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

Przykłady:

Rozwinięcie według elementów <u>trzeciego</u> wiersza:

$$det\begin{bmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ -3 & 6 & 2 & 0\\ 4 & 0 & -5 & -2\end{bmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & -5 & -2\end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix} +$$

$$2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 4 & 0 & -5\end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot 21 + 6\cdot(-1)\cdot(-33) + 2\cdot 48 + 0\cdot(-1)\cdot 78 = 231$$

Rozwinięcie według elementów <u>drugiej</u> kolumny:

$$det\begin{bmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ -3 & 6 & 2 & 0\\ 4 & 0 & -5 & -2\end{bmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 4 & 3\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 0\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix} +$$

$$6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 4 & -5 & -2\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot(-11) + 0\cdot 0 + 6\cdot(-1)\cdot(-33) + 0\cdot 11 = 231$$

Metoda eliminacji Gaussa

Korzysta z własności wyznacznika macierzy - wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn).

Inne własności wyznaczników:

- wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy wyjściowej,
- jeżeli macierz posiada wiersz zerowy (kolumnę zerową), wówczas $detA = 0$,
- jeżeli macierz posiada dwa identyczne wiersze (kolumny), wówczas $detA = 0$,
- jeżeli jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), wówczas $detA = 0$,
- zamiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika,
- jeżeli w danej macierzy elementy danego wiersza lub kolumny zostaną przemnożone przez dowolną liczbę $k \neq 0$, wówczas wartość wyznacznika również zostanie przemnożona przez k,

- zachodzi równość $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$

- wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn)