

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE cd.

Zastosowanie równań różniczkowych do modelowania populacji w czasie ciągłym.

Model Malthusa

Założenia modelu:

- populacja ma bardzo dobre warunki rozwoju, nieograniczony dostęp do pożywienia i miejsc lęgowych;
- obserwujemy jedynie proces rozmnażania;
- osobniki w danej populacji są jednakowe i podlegają jednakowym prawom;
- osobniki w danej populacji są równomiernie rozłożone w przestrzeni;
- osobnik rodzi się w pełni ukształtowany, zdolny do rozrodu i może rozmnażać się w dowolnym wieku;
- momenty rozmnażania są w dowolnym przedziale czasu rozłożone jednostajnie;
- każdy osobnik wydaje na świat potomstwo co τ jednostek czasu, τ jest ustalone i jednakowe dla wszystkich osobników;
- każdorazowo jeden rodzic ma λ osobników potomnych.

Średnia liczebność populacji $N(t)$ w chwili t .

Przyrost liczebności w krótkim czasie Δt :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

jest proporcjonalny do λ osobników potomnych w liczbie τ jednostek czasu i do wielkości populacji w danej chwili:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau} N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} N(t)$$

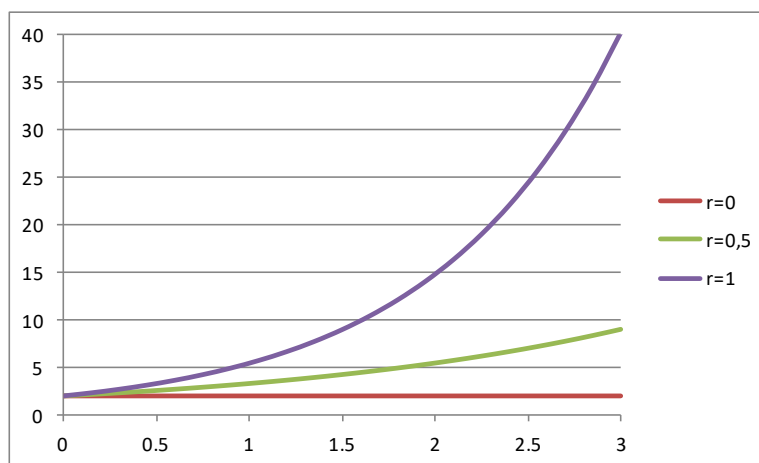
$r = \frac{\lambda}{\tau}$ współczynnik rozrodczości populacji

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

zakładamy, że $N(t) = N_0$

rozwiązanie

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$



$$\text{jeśli } r > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N_0 e^{rt} = +\infty$$

Procesy rozrodczości i śmiertelności

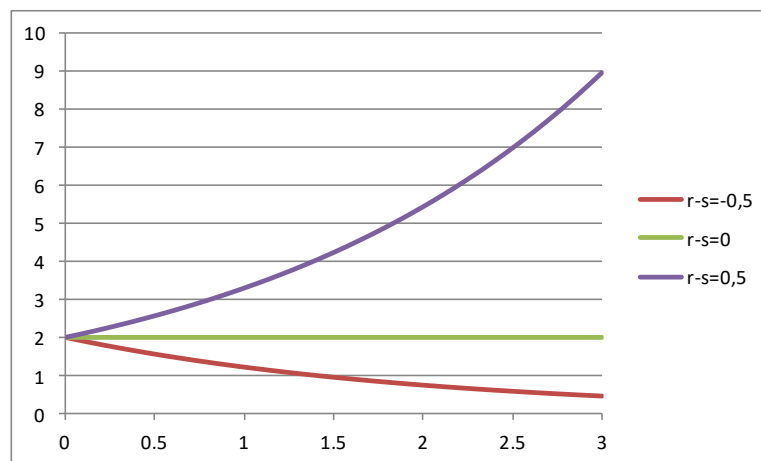
W modelu powinna być także uwzględniona śmiertelność osobników populacji:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) - sN(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N(t)$$

s - współczynnik śmiertelności populacji

$$N(t) = N_0 e^{(r-s)t}$$



Model Verhulsta

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N$$

K - stała charakteryzująca zasoby pożywienia

jeżeli $N > K$ populacja maleje

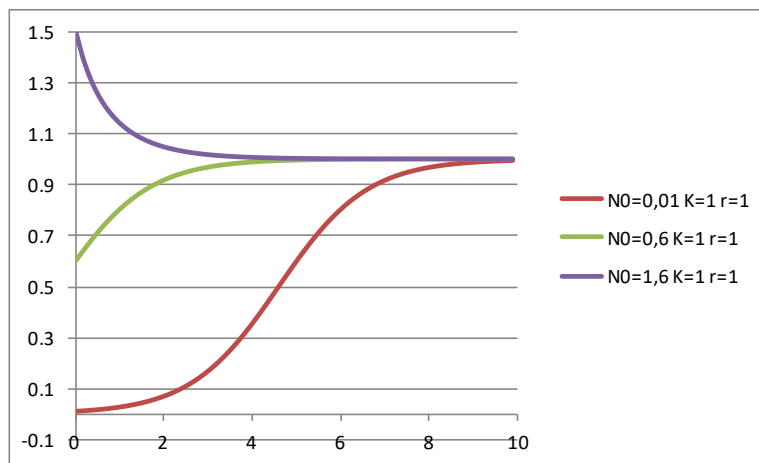
jeżeli $N < K$ populacja rośnie

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$$

zakładamy, że $N(t = 0) = N_0$

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} = K$$



Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie

Urszula Foryś, Jan Poleszczuk

<http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm>