

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Równaniem różniczkowym pierwszego rzędu nazywamy równanie

$$F(x, y, y') = 0$$

W równaniu różniczkowym konieczne jest y' .

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego jest funkcja

$$y = f(x, C)$$

Jeśli znana jest wartość parametru C , to rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego jest funkcja

$$y = f(x)$$

Jeżeli szukana funkcja zależy tylko od jednej zmiennej niezależnej, to mówimy, że równanie jest zwyczajne.

Przykład 1.

$$y' = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{1}{y} dy = 2dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2dx$$

$$\ln y = 2x + C$$

rozwiązanie ogólne:

$$y = e^{2x+C}$$

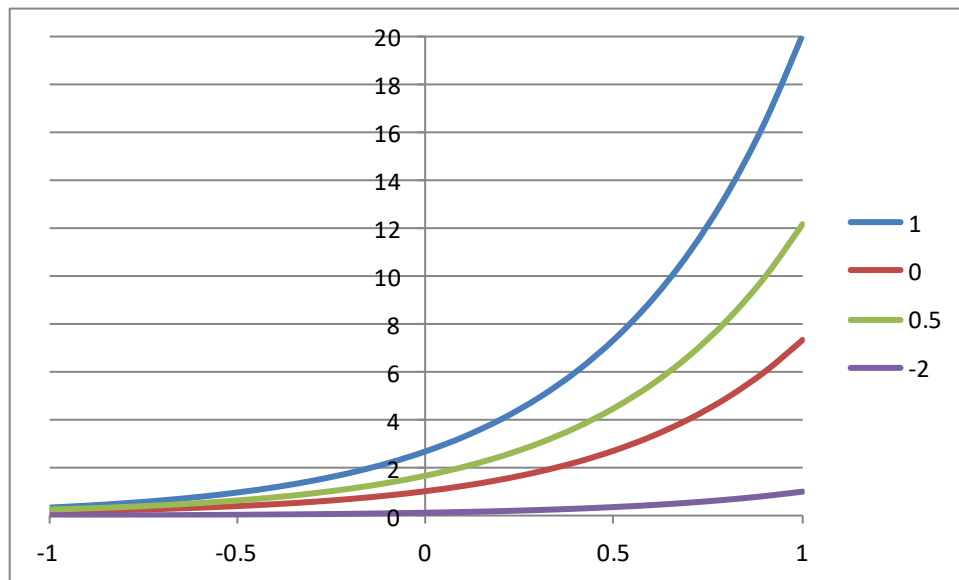
w zależności od parametru C możemy mieć na przykład:

$$y = e^{2x+1} \text{ dla } C = 1$$

$$y = e^{2x} \text{ dla } C = 0$$

$$y = e^{2x+\frac{1}{2}} \text{ dla } C = \frac{1}{2}$$

$$y = e^{2x-2} \text{ dla } C = -2$$



Rozwiązanie szczególne znajdujemy po uwzględnieniu warunków początkowych, które pozwolą na wyodrębnienie krzywej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) .

Założmy, że warunki początkowe z przykładu 1 są następujące $y(0) = 4$:

$$4 = e^{2 \cdot 0 + C} = e^{2 \cdot 0} e^C = 1 \cdot e^C$$

$$4 = e^C$$

rozwiązanie szczególne:

$$y = 4e^{2x}$$

Przykład 2.

$$\sqrt{x}y' = y + 1$$

warunek początkowy

$$y(0) = 1$$

Przykład 3.

W celu sformułowania prawa rozpadu promieniotwórczego założmy, że prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu dla pojedynczego jądra jest stałe i wynosi λ . Liczba dN jąder, które się rozpadły w czasie dt jest proporcjonalna do liczby N jąder promieniotwórczych:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Warunki początkowe:

$$N(t = 0) = N_0$$

$$N\left(t = T_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{N_0}{2}$$