MACIERZE

Macierz to prostokątna tablica, w której można wyróżnić wiersze i kolumny. Poniższa macierz prostokątna ma *n* wierszy i *m* kolumn, czyli jest wymiaru *n* x *m*.

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Element znajdujący się na przecięciu *i*-tego wiersza i *j*-tej kolumny oznaczamy $a_{ij}$.

Element $a_{12}$ znajduje się w pierwszym wierszu w drugiej kolumnie.

Macierz, której liczba wierszy *n* i liczba kolumn *m* są równe (*n*=*m*) nazywa się macierzą kwadratową stopnia *n*. Przekątna macierzy i macierz jednostkowa.

Podaj wymiar następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$A_{2\times 3}$

$B_{3\times 3}$, czyli macierz kwadratowa stopnia 3

$C_{4\times 1}$

$D_{1\times 4}$

$E_{1\times 1}$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

- Dodawanie i odejmowanie macierzy

  Wymiary dodawanych lub odejmowanych macierzy muszą być takie same

$$A_{n\times m}+B_{n\times m}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m}-B_{n\times m}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2m}-b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

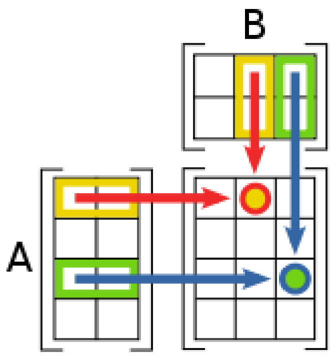
- Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k\cdot A_{n\times m}=k\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1m} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\cdot a_{n1} & k\cdot a_{n2} & \dots & k\cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Transponowanie macierzy

$${A_{n\times m}}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^T=C_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Mnożenie dwóch macierzy




https://pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie_macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

- Macierz jednostkowa *I*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{n \times m} \cdot I_n = A_{n \times m} = I_m \cdot A_{n \times m}$$

- Kolejność działań na macierzach:

  Mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem

  Transponowanie przed innymi działaniami

  Najpierw działania w nawiasach

- Prawa działań na macierzach:

  Prawo łączności dodawania: (*A* + *B*) + *C* = *A* + (*B* + *C*),

  Prawo łączności mnożenia: (*A* · *B*) · *C* = *A* · (*B* · *C*),

  Prawo przemienności dodawania: *D* + *F* = *F* + *D*,

  Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: *k*(*D* + *F*) = *k D* + *k F*,

  Mnożenie iloczynu macierzy przez liczbę: *k*(*DE*) = (*kD*)*E* = *D*(*kE*), Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $(A + B)E = AE + BE$,

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $D(A + B) = DA + DB$,

Prawo transponowania sumy: $(D + F)^T = D^T + F^T$,

Prawo podwójnej transpozycji: $(F^T)^T = F$,

Prawo transponowania iloczynu: $(FE)^T = E^T F^T$.