$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$$

CAŁKI

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a < x < b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się tej funkcji.

Dwie funkcje, które w tym samym przedziale mają tę samą pochodną mogą się różnić o stałą.

Całka nieoznaczona funkcji $f(x)$ po dx:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} \qquad\qquad \int f(x)dx$$

Jeżeli

$\int f(x)dx = F(x) + C,$

to funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną, a C stałą oraz

$F'(x) = f(x).$

Stała C:

Jeżeli pochodna funkcji jest równa $3x^2$, to funkcja może mieć wzór $x^3 + 4$ lub $x^3 - 1$ lub w ogólności $x^3 + C$.

Wzory rachunku całkowego:

- $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$

np.

$$\int dx = x + C \qquad (x + C)' = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

ale

- $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$

- $\int e^x dx = e^x + C$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

Własności całek:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Przykłady:

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2}dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}-2} - x^{\frac{1}{3}-2}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{5}{3}}\right)dx =$$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{5}{3}+1}x^{-\frac{5}{3}+1} + C =$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}} + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \left\{\begin{matrix} t = 2x-3 \\ t' = \frac{dt}{dx} = 2 \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} + C = t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= (2x-3)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x-3} + C$$

$$\int \frac{1}{5x-1}dx = \int \frac{dx}{5x-1} = \left\{\begin{matrix} t = 5x-1 \\ t' = \frac{dt}{dx} = 5 \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{matrix}\right\}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{5}dt}{t} = \frac{1}{5}\int t^{-1}dt = \frac{1}{5}ln|t| + C = \frac{1}{5}ln|5x-1| + C$$

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}x\,dx = \left\{\begin{matrix} x^2 = t \\ \frac{dt}{dx} = 2x/\cdot dx \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \int e^t \frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

*Całkowanie przez części

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv$$

$$u\cdot dv = d(u\cdot v) - du\cdot v$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int xe^x dx = \begin{Bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{Bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int lnx dx = \begin{Bmatrix} u = lnx & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x} dx & v = \int dx = x \end{Bmatrix} = xlnx - \int x \frac{1}{x} dx = xlnx - x + C$$