WolframAlpha

Przykład - granice	**WolframAlpha**
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-4}{5n+9}$	limit(2n-4)/(5n+9) as n->inf
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{\sqrt{n^2-1}}$	limit(1-2n)/(n^2-1)^0.5 as n->inf
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \sqrt{2}\right)$	limit(1/n-2^0.5) as n->inf
$\lim\limits_{n\to\infty} (1-e^{-n})$	limit(1-exp(-n)) as n->inf limit(1-e^(-n)) as n->inf discreteplot (1-exp(-n)) {n,1,50}
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	sum 1/n^2, n=1 to infinity
$\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-3)e^x$	limit(x^2-3)*e^x as x->-inf
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{lnx}$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x}{lnx}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x}{lnx}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{lnx}$	limit x/ln(x) as x->0+ limit x/ln(x) as x->1- limit x/ln(x) as x->1+ limit x/ln(x) as x->inf x/ln(x) as x in (0,5)
$\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$	limit x*e^(-x) as x->inf

POCHODNE

Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę, do której dąży iloraz przyrostu funkcji $f(x+\Delta x) - f(x)$ do przyrostu zmiennej Δx, gdy Δx dąży do 0:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Pochodna niesie informację o tym, jak funkcja zmienia się w danym punkcie.

Pochodną funkcji $f(x)$ oznaczamy:

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx}$$

lub

$$y', \frac{dy}{dx}, \dot{y}$$

Znajdowanie pochodnej funkcji nazywa się różniczkowaniem funkcji.

Pochodna funkcji stałej równa się zeru:

a - stała

$$a' = 0$$

Pochodna x^a:

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

Pochodna iloczynu stałej przez funkcję równa się iloczynowi stałej i pochodnej tej funkcji

$$\big(k \cdot f(x)\big)' = k \cdot f'(x)$$

Pochodna sumy/różnicy funkcji:

$$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$$

Pochodna iloczynu funkcji:

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pochodna ilorazu funkcji:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Pochodna funkcji złożonej:

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$$

$$(lnx)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x lna$$

$$(e^x)' = e^x$$

Przykłady:

$$(-3)' = 0$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(x^4)' = 4x^3$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(4x^2\sqrt{x}\right)' = \left(4x^{\frac{5}{2}}\right)' = 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}-1} = 10x^{\frac{3}{2}}$$

$$(2^x)' = 2^x ln2$$

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{xln3}$$

$$\left(x^2 + \sqrt[4]{x}\right)' = (x^2)' + \left(\sqrt[4]{x}\right)' = 2x + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$\left(x^2 - \sqrt[4]{x}\right)' = (x^2)' - \left(\sqrt[4]{x}\right)' = 2x - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$(x^6 e^x)' = (x^6)' e^x + x^6 (e^x)' = 6x^5 e^x + x^6 e^x = x^5 e^x (6 + x)$$

$$\left(\frac{lnx}{x^2}\right)' = \frac{(lnx)' x^2 - lnx (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - lnx \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2lnx)}{x^4}$$

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)' = \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2}$$
$$= \frac{(1-0)(x+3) - (x-1)(1+0)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{4x^2+3x}\right)' = \left((4x^2+3x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(4x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}(4x^2+3x)'$$
$$= \frac{1}{2}(4x^2+3x)^{-\frac{1}{2}}(8x+3) = \frac{8x+3}{2\sqrt{4x^2+3x}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\ln(x^3 - 4x))' = \frac{1}{x^3 - 4x}(x^3 - 4x)' = \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x}$$

$$\left(e^{x^3-5}\right)' = e^{x^3-5}(x^3 - 5)' = 3x^2 e^{x^3-5}$$

$$(\ln(\mathrm{x}))' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Przykład - pochodne	**WolframAlpha**
$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6\right)'$	derivative 1/3*x^3-3/2*x^4+13/5*x^5-2*x^6
$\left(e^{x^3-5}\right)'$	derivative e^(x^3-5)
$(\ln(x^3 - 4x))'$	derivative ln(x^3-4x)
$\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)'$	derivative x^(-5/2)

Zastosowanie POCHODNEJ

Badanie przebiegu zmienności funkcji

- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest każdym punkcie pewnego przedziału równa zeru, to funkcja jest w tym przedziale stała
- Jeżeli funkcja posiada w pewnym punkcie ekstremum lokalne, to pochodna funkcji w tym punkcie równa się zeru.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni to funkcja osiąga minimum.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny to funkcja osiąga maksimum.

Reguła de L'Hospitala:

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $(a, b]$, kiedy

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[a, b)$, kiedy

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[b, \infty)$, kiedy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

Przykład 1. Policzyć granicę: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{-1/x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2/x^3}$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1/e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

Przykład 2. Zbadać monotoniczność funkcji:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$$

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja nie posiada asymptot.

$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = \infty$

- Obliczamy pochodną:

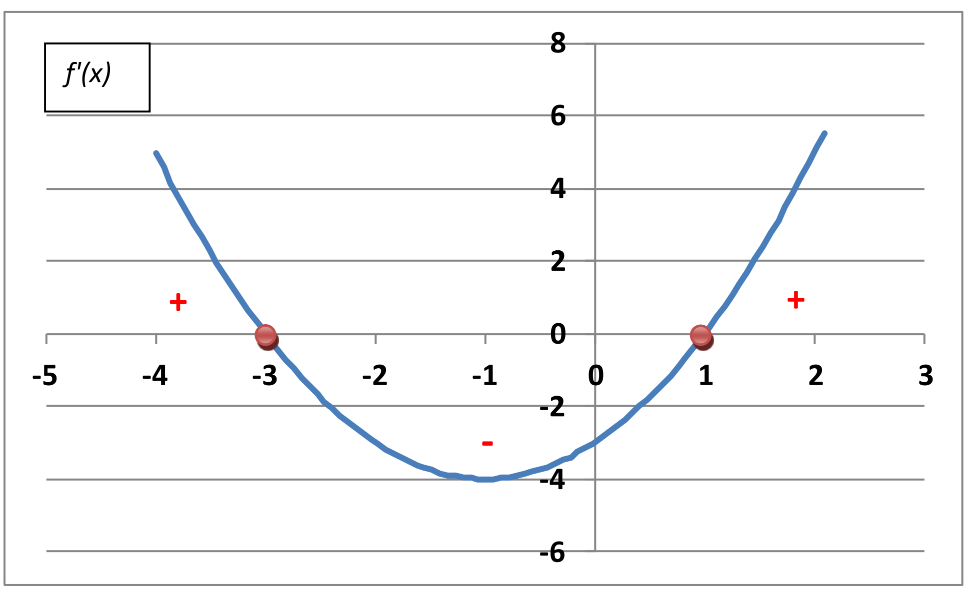
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Przyrównujemy pochodną do zera w calu znalezienia ekstremów lokalnych funkcji:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ oraz } x = 1$$



Ekstrema lokalne są dla wartości zmiennej $x = -3$ oraz $x = 1$.

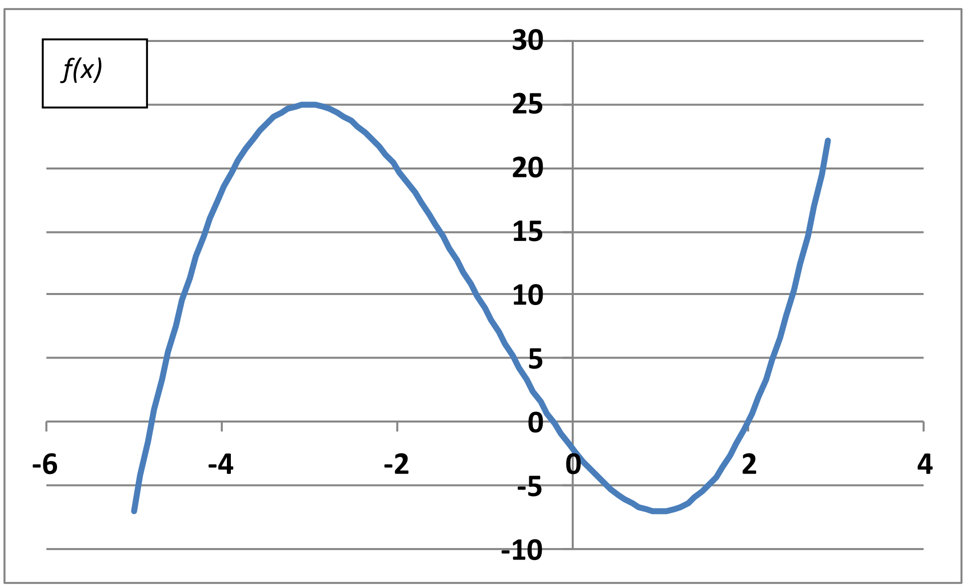
W przedziale $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (1, \infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tych przedziałach rosnąca.

W przedziale $x \in (-3,1)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\cdots$	**-3**	$\cdots$	**1**	$\cdots$	∞
$\boldsymbol{f'(x)}$	∞	$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$-\infty$	↗	**25**	↘	**-7**	↗	∞

Oraz wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$:



Przykład 3. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{lnx}$$

- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich bez liczby 1: $x \in (0,1) \cup x \in (1, +\infty)$.
- Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Badamy istnienie asymptot:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{lnx} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{lnx} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{lnx} = +\infty$$

Istnieje asymptota pionowa obustronna $x = 1$.

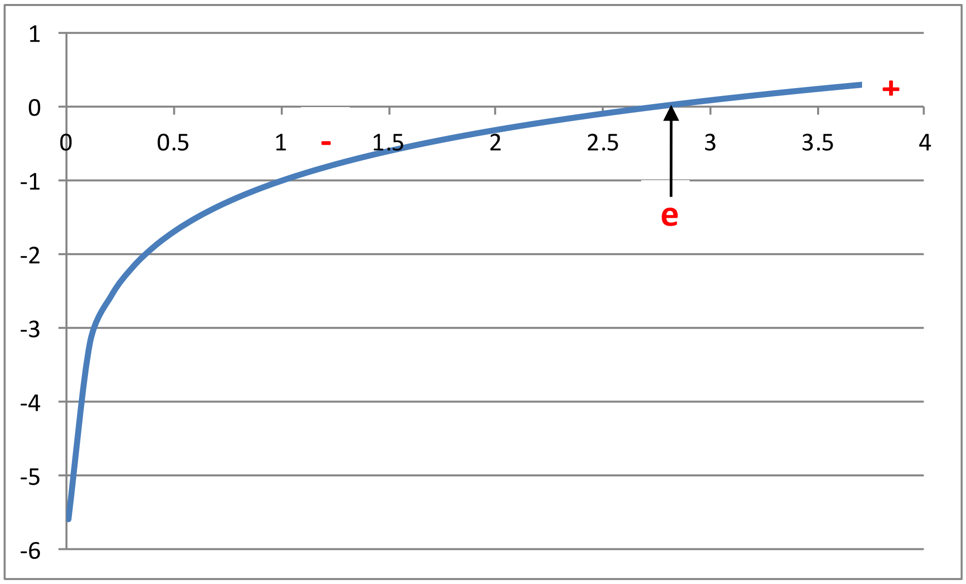
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{lnx} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{(lnx)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Sprawdzamy istnienie ekstremów i wyznaczamy przedziały monotoniczności:

$$\left(\frac{x}{lnx}\right)' = \frac{(x)' lnx - x(lnx)'}{(lnx)^2} = \frac{lnx - x\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = \frac{lnx - 1}{(lnx)^2}$$

$lnx - 1 = 0 \rightarrow lnx = 1 \rightarrow x = e$

$f(e) = e$



W przedziale $x \in (0, e)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

W przedziale $x \in (e, +\infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale rosnąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0^+}$	$\cdots$	$\mathbf{1^-}$	$\mathbf{1^+}$	$\cdots$	$\boldsymbol{e}$	$\cdots$	$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{0}$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\boldsymbol{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Przykład 4. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-x}}$$