CAŁKI OZNACZONE

Jeżeli w przedziale $< a, b >$ jest $f(x) > 0$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, a odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ równa się całce oznaczonej:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Jeżeli w przedziale $< a, b >$ jest $f(x) \leq 0$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$, a odcinkiem osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ równa się całce oznaczonej:

$$-\int_a^b f(x)dx$$

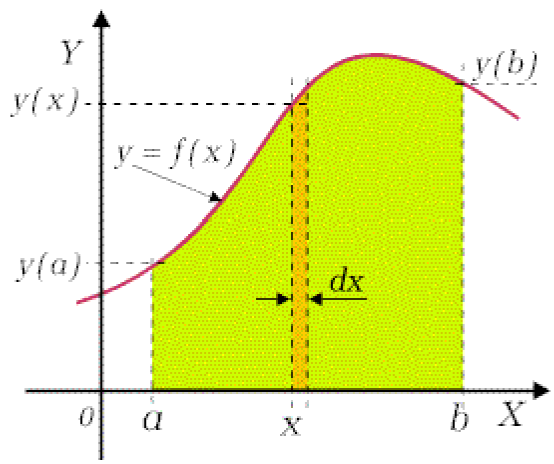
Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $< a, b >$, tzn.

$F'(x) = f(x)$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

różnica $F(b) - F(a)$ nie zależy od stałej całkowania C.

Interpretacja graficzna



http://www.if.pw.edu.pl/~wosinska/am2/matma/calka/calka.HTM

Własności całek oznaczonych:

- jeżeli $a \leq b \leq c$ zachodzi addytywność całek względem przedziału całkowania

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- stały czynnik można wyłączyć przed znak całki oznaczonej

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

- całka sumy równa się sumie całek

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Przykłady:

$$\int_{-1}^{2}(x^3-2x+1)dx=\int_{-1}^{2}x^3dx-2\int_{-1}^{2}xdx+\int_{-1}^{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{2}-2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+x|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{1}{4}(2^4-(-1)^4)-(2^2-(-1)^2)+\big(2-(-1)\big)=$$

$$=\frac{15}{4}-3+3=\frac{15}{4}$$

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2\sqrt{x}\Big|_0^1=2-0=2$$

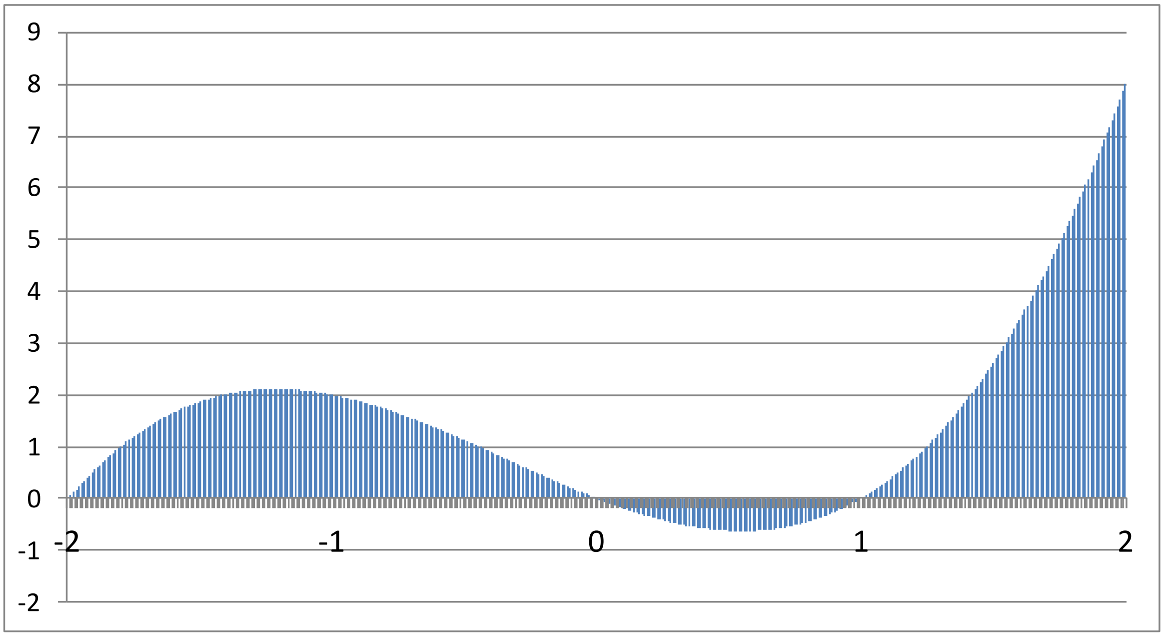
Całkowanie przez podstawienie

$$\int_0^3\frac{1}{\sqrt[5]{3-x}}dx=\left\{\begin{matrix}t=3-x\\ t'=\frac{dt}{dx}=-1\\ dx=-dt\end{matrix}\right\}=\int_3^0\frac{-1}{\sqrt[5]{t}}dt=\frac{-1}{-\frac{1}{5}+1}t^{-\frac{1}{5}+1}\Bigg|_3^0=-\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}}\Big|_3^0$$

$$=-\left(0-\frac{5}{4}3^{\frac{4}{5}}\right)=\frac{5}{4}3^{\frac{4}{5}}$$

Obliczanie pola pod krzywą

Oblicz pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $y = x^3 + x^2 - 2x$, odcinkiem osi Ox oraz funkcjami $x = -2$ i $x = 2$.



$$\int_{-2}^{2}(x^3 + x^2 - 2x)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{1}(x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{1}^{2}(x^3 + x^2 - 2x)dx$$

$$\neq$$

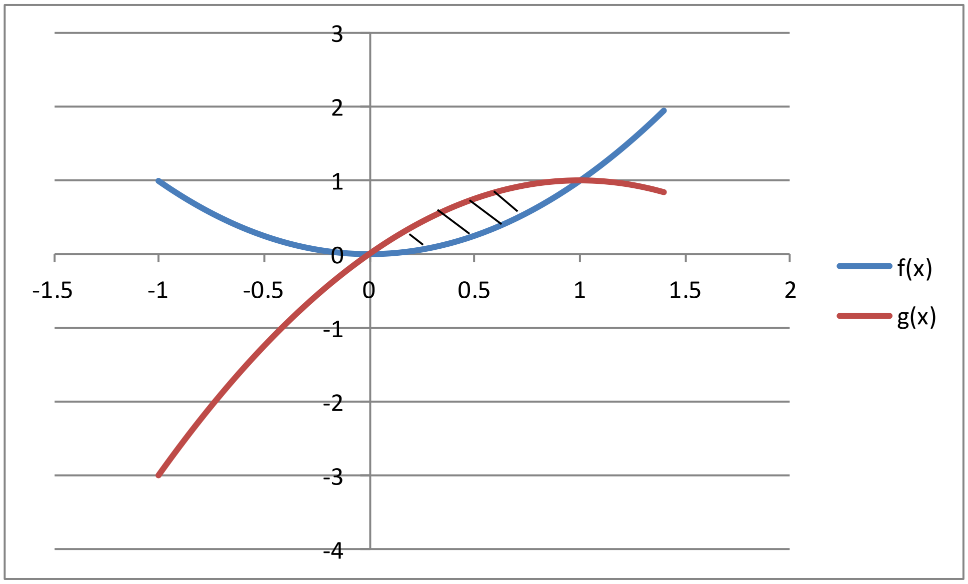
$$\int_{-2}^{0}(x^3 + x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{1}(x^3 + x^2 - 2x)dx + \int_{1}^{2}(x^3 + x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{1}^{2} =$$

$$= \left(0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - 0\right) + \left(\left(\frac{16}{4} + \frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{37}{6}$$

Wyznaczyć pole obszaru ograniczonego wykresami parabol $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = 2x - x^2$.



Wyznaczamy punkty przecięcia parabol rozwiązując równanie

$2x - x^2 = x^2$

$2x - 2x^2 = 0$

stąd

$x = 0$ lub $x = 1$

Wobec tego:

$$\int_0^1 (2x - 2x^2)dx = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = 2(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$