

Zastosowanie POCHODNEJ

Badanie przebiegu zmienności funkcji

- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, to funkcja jest w tym przedziale malejąca.
- Jeżeli pochodna funkcji jest każdym punkcie pewnego przedziału równa zero, to funkcja jest w tym przedziale stała
- Jeżeli funkcja posiada w pewnym punkcie ekstremum lokalne, to pochodna funkcji w tym punkcie równa się zero.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z ujemnego na dodatni to funkcja osiąga minimum.
- Jeżeli pochodna funkcji przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 zmienia znak z dodatniego na ujemny to funkcja osiąga maksimum.

Reguła de L'Hospitala:

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $(a, b]$, kiedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[a, b)$, kiedy

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

- Dla funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ określonych w przedziale $[b, \infty)$, kiedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty$$

oraz istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$ i $g'(x) \neq 0$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$$

a także

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

Przykład 1. Policzyc granicę: $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2/x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1/e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}}$$

Przykład 2. Zbadać monotoniczność funkcji:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$$

- Dziedzina funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Funkcja nie posiada asymptot.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 2 = \infty$$

- Obliczamy pochodną:

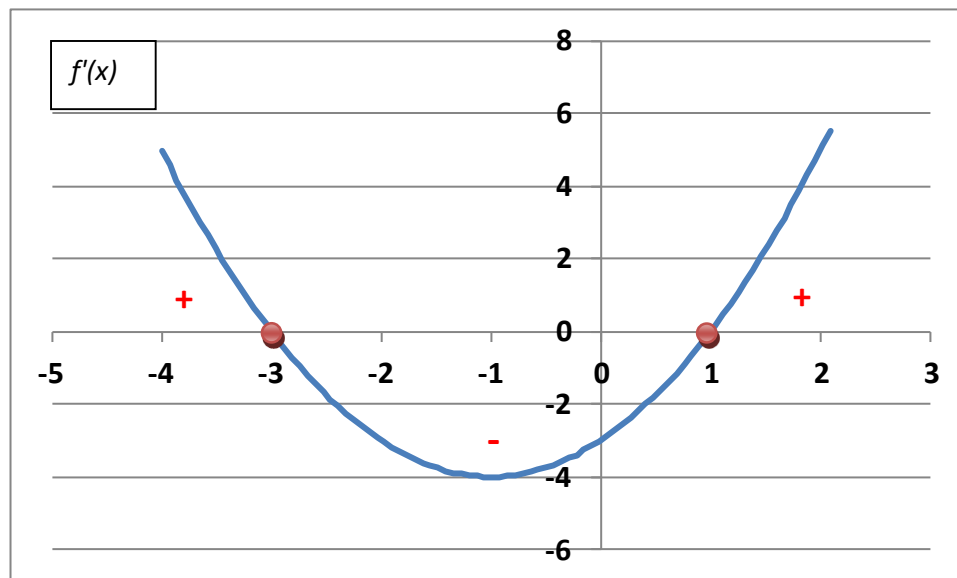
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

Przyrównujemy pochodną do zera w celu znalezienia ekstremów lokalnych funkcji:

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ oraz } x = 1$$



Ekstrema lokalne są dla wartości zmiennej $x = -3$ oraz $x = 1$.

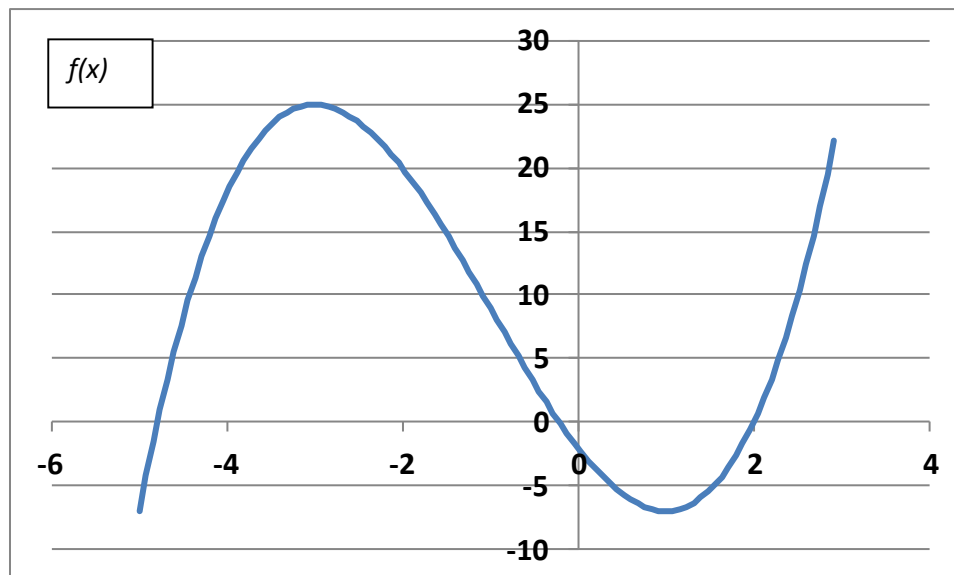
W przedziale $x \in (-\infty, -3)$ oraz $x \in (1, \infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tych przedziałach rosnąca.

W przedziale $x \in (-3, 1)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

x	$-\infty$...	-3	...	1	...	∞
$f'(x)$	∞	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	25	↘	-7	↗	∞

Oraz wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$:



Przykład 3. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

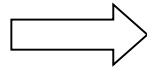
- Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich bez liczby 1: $x \in (0,1) \cup x \in (1, +\infty)$.
- Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Badamy istnienie asymptot:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$



Istnieje asymptota pionowa obustronna $x = 1$.

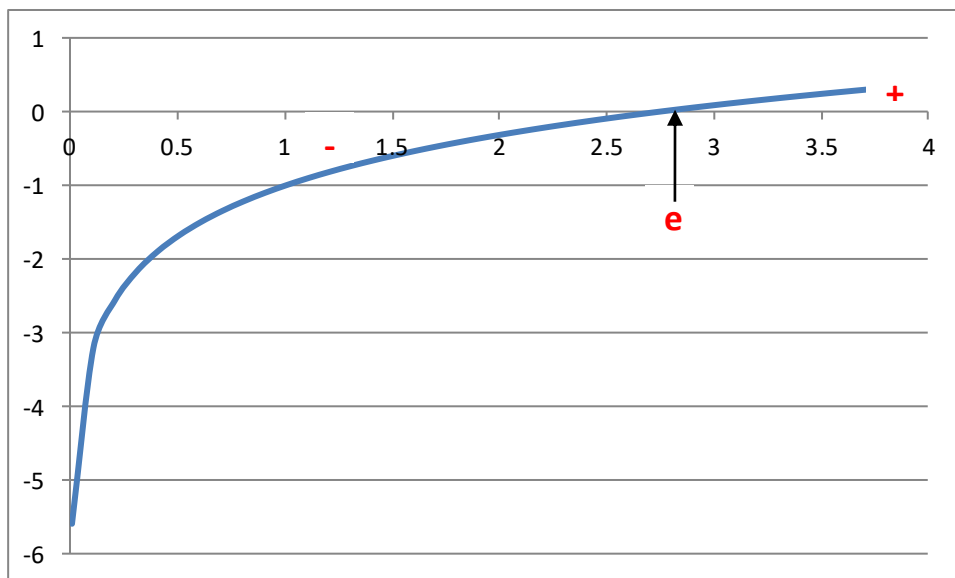
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Sprawdzamy istnienie ekstremów i wyznaczamy przedziały monotoniczności:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$\ln x - 1 = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

$$f(e) = e$$



W przedziale $x \in (0, e)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest ujemna, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale malejąca.

W przedziale $x \in (e, +\infty)$ pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia, czyli funkcja $f(x)$ jest w tym przedziale rosnąca.

Można narysować tabelkę przebiegu zmienności funkcji:

x	0^+	...	1^-	1^+	...	e	...	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Przykład 4. Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-x}}$$