SZEREGI

1. Wpisz podaną sumę w formie skróconej za pomocą symbolu Σ:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$

b) $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{20} =$

c) $z_1 + z_2 + z_3 + \cdots =$

d) $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} =$

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{100}^2 =$

f) $(y_1 - 5)^2 + (y_2 - 5)^2 + \cdots + (y_{17} - 5)^2 =$

g) $2z_1^2 + 2z_2^2 + \cdots + 2z_{13}^2 =$

2. Zapisz podane wyrażenie jako sumę składników. W punktach b) - h) wypisz dwie pierwsze i dwie ostatnie składowe.

$$a)\ \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = \quad ,\ b)\ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \quad ,\ c)\ \sum_{j=1}^{25} \left(z_j - \bar{z}\right)^2 = \quad ,\ d)\ \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \bar{z}\right)^2 = \quad ,\ e)\ \sum_{n=1}^{20} x_n y_n = \quad ,$$

$$f)\ \sum_{i=1}^{a} x_i y_i = \quad ,\ g)\ \sum_{k=1}^{100} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad ,\ h)\ \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

3. Dla danych x_i: 1, 4, 6, 9 i danych y_i: 0, 6, 6, 12 oblicz wyrażenia (n reprezentuje liczbę danych).

$$a)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \quad ,\ b)\ \bar{x} = \quad ,\ c)\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \quad ,\ d)\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \quad ,\ e)\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \quad ,$$

$$f)\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \quad ,\ g)\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \quad ,\ h)\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Szereg liczbowy nieskończony

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$\vdots$$

$u_1, u_{2,}$ ... – wyrazy szeregu

u_n – wyraz ogólny szeregu

s_n – sumy cząstkowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Jeżeli ciąg sum cząstkowych $s_1, s_2, \ldots s_n$ jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Jeżeli ciąg sum cząstkowych $s_1, s_2, \ldots s_n$ jest rozbieżny, czyli ma nieskończoną granicę lub jej nie ma, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Przykład szeregu rozbieżnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4$$

Przykład szeregu zbieżnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots = \frac{1}{2}$$

Twierdzenie:

Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest, aby jego wyraz ogólny u_n dążył do zera

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny i jego suma równa się s, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ jest zbieżny przy założeniu że c jest stałe, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ jest rozbieżny jeśli $c \neq 0$.

Ważniejsze szeregi:

- szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$, czyli $-1 < q < 1$ wtedy jego suma wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

jest rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$, czyli $q \leq -1 \; lub \; q \geq 1$

- szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

jest rozbieżny do ∞

Dowód:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \cdots \geq$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + (\frac{1}{32} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

- szereg harmoniczny rzędu $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots$$

jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$

jest rozbieżny, gdy $\alpha \leq 1$

gdy $\alpha = 1$ jest to szereg harmoniczny

Grupy szeregów:

- szeregi o wyrazach nieujemnych, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} = 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2} + \cdots$$

- szeregi przemienne, z wyrazami dodatnimi i ujemnymi występującymi na przemian

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n = -2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 + \cdots - 2^n + \cdots$$

- inne

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} n = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 \ldots$$

Kryteria zbieżności szeregów

Kryterium porównawcze zbieżności szeregów: Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdzie $u_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \leq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również zbieżny.

Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów: Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdzie $u_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ gdzie $v_n \geq 0$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \geq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również rozbieżny.

Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów. Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) iloraz dowolnego wyrazu u_{n+1} i wyrazu go poprzedzającego jest stale mniejszy od pewnej liczby p mniejszej niż 1 to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < p < 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny

Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów. Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) iloraz dowolnego wyrazu u_{n+1} i wyrazu go poprzedzającego nie jest mniejszy od pewnej liczby p mniejszej niż 1 to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny

Jeżeli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny lub rozbieżny i należy stosować inne kryteria badania zbieżności.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach nieujemnych istnieje taka liczba $p < 1$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $\sqrt[n]{u_n} < p < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Kryterium Cauchy'ego rozbieżności szeregów. Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dla nieskończenie wielu wartości n (niekoniecznie dla wszystkich) zachodzi nierówność $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p = 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny lub rozbieżny i należy stosować inne kryteria badania zbieżności.

Przykład: Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Pierwsze wyrazy ciągu:

$$\frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} + \frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} + \frac{6^8}{8!} + \cdots = 6 + 18 + 36 + 54 + 64\frac{4}{5} + 64\frac{4}{5} + 55\frac{19}{35} + 41\frac{23}{35} + \cdots =$$

$$u_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \qquad u_n = \frac{6^n}{n!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{6^n}{n!} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n} = \frac{6 \cdot 6^n}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{6^n} = \frac{6}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Szereg jest zbieżny.

Przykład. Oblicz jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy:

$$0,(45)$$

Rozwiązanie

$$0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,00000045 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{100^n}$$

Jest to szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

gdzie $a = 0,45, q = 0,01$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0,45 \cdot 0,01^{n-1} = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{5}{11}$$

WolframAlpha

Liczenie sumy szeregu:

sum 1/n^2, n=1 to infinity Wcisnąć „=”