CIĄGI

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista a_n, to mówimy, że został określony nieskończony ciąg liczbowy. Ciąg zapisuje się w postaci: $a_1, a_2, \dots, a_n$ lub $\{a_n\}$

Liczby $a_1, a_2, \dots$ nazywa się wyrazami ciągu $\{a_n\}$, a a_n nazywa się wyrazem ogólnym ciągu.

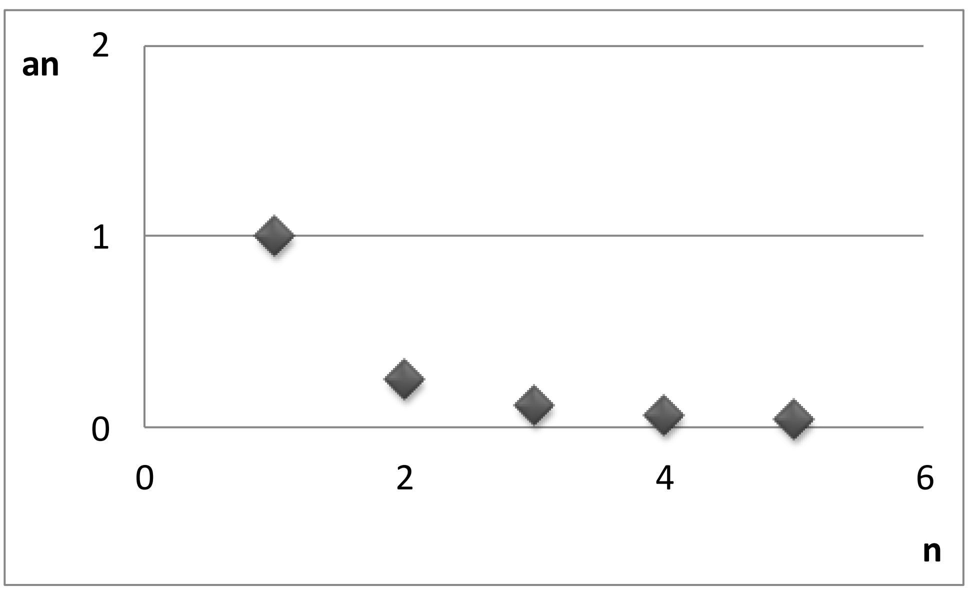
Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g, gdy przy $n \to \infty$, $a_n \to g$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

Przykład 1: $a_n = \frac{1}{n^2}$

n	1	2	3	4	5	…	$\to \infty$
a_n	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	…	$\to 0$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę 0, gdy $n \to \infty$,

$\frac{1}{n^2} \to 0$, gdy $n \to \infty$, lub $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$



Przykład 2:

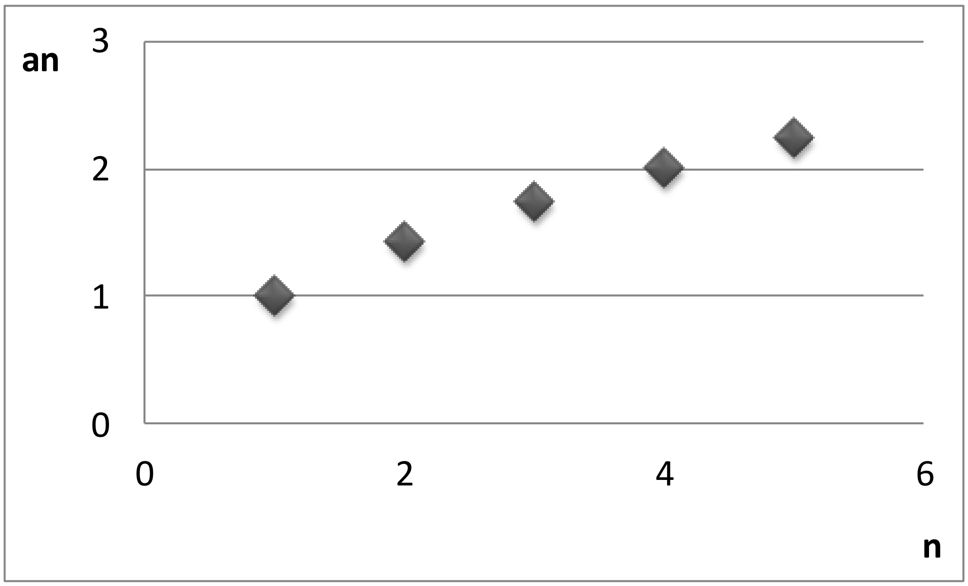
$$a_n = \sqrt{n}$$

n	1	2	3	4	5	…	$\to \infty$
a_n	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	…	$\to \infty$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę ∞, przy $n \to \infty$,

$\sqrt{n} \to \infty$, gdy $n \to \infty$,

lub $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$



Przykład 3:

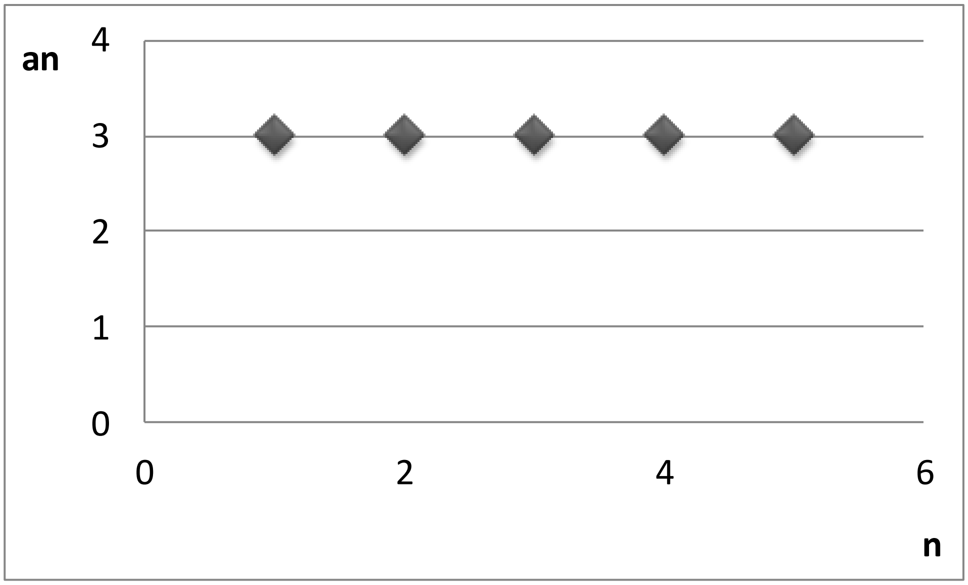
$$a_n = 3$$

n	1	2	3	4	5	…	$\to \infty$
a_n	3	3	3	3	3	…	$\to 3$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę 3, przy $n \to \infty$,

$3 \to 3$, gdy $n \to \infty$,

lub $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$

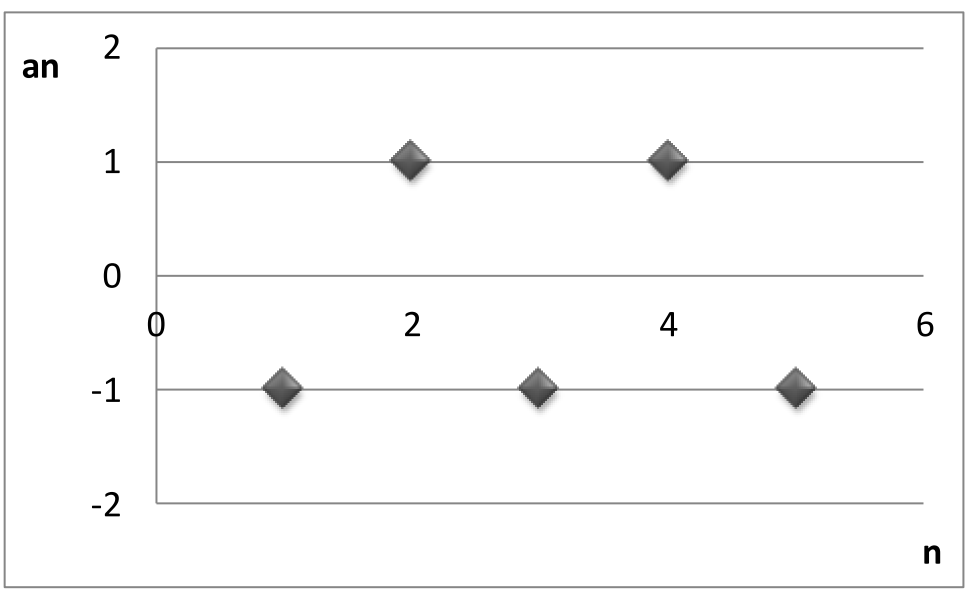


Przykład 4:

$$a_n = (-1)^n$$

n	1	2	3	4	5	…	$\to \infty$
a_n	-1	1	-1	1	-1	…	$\to ?$

Ciąg $\{a_n\}$ nie wiadomo jaką ma granicę, gdy $n \to \infty$



DEFINICJE:

Definicja 1. Ciąg jest określony rekurencyjnie, gdy podana jest wartość pierwszego wyrazu (lub kilku pierwszych wyrazów), na podstawie której wyznaczany jest kolejny wyraz ciągu przy pomocy sformułowanego wzoru.

Ciąg arytmetyczny: dane są liczby a i r

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$$

Ciąg geometryczny: dane są liczby a i q

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego: od trzeciego wyrazu ciągu, każdy wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Przykład: Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n - 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	7	32	157

Przykład: Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$

Przykład: Określić rekurencyjnie ciąg arytmetyczny (a_n), na podstawie:

$$a_1 = -1, a_7 = -13$$

Rozwiązanie: $a_2 = -1 + r$, $a_3 = -1 + r + r, a_4 = -1 + r + r + r, \ldots,\ a_n = -1 + (n-1) \cdot r$

$$a_7 = -1 + 6 \cdot r = -13\ \Rightarrow (7-1) \cdot r = -12\ \Rightarrow r = -2$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$$

Przykład: Określić rekurencyjnie ciąg geometryczny (a_n), na podstawie:

$$a_2 \cdot a_3 = 432, \qquad a_4 = 108$$

$a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$, $a_4 = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r, \ldots,\ a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r \cdot r = {a_1}^2 \cdot r^3 = 432$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 108$$

$$a_1 \cdot r = \frac{108}{r^2}$$

$${a_1}^2 \cdot r^2 = \frac{432}{r} = \frac{11664}{r^4} \Rightarrow r = 3\ i\ a = 4$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 3 \end{cases}$$

Definicja 2. Ciąg nieskończony (a_n) nazywa się rosnącym jeśli $a_{n+1} > a_n$ dla każdego n. Ciąg nieskończony (a_n) nazywa się malejącym jeśli $a_{n+1} < a_n$ dla każdego n.

Ciąg nieskończony (a_n) nazywa się niemalejącym jeśli $a_{n+1} \geq a_n$ dla każdego n. Ciąg nieskończony (a_n) nazywa się nierosnącym jeśli $a_{n+1} \leq a_n$ dla każdego n.

Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywa się ciągami monotonicznymi.

Przykład: Udowodnić, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}$ jest ciągiem rosnącym.

Dla każdego n musi zachodzić $a_{n+1} - a_n > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Przykład: Udowodnić, że ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem malejącym.

Dla każdego n musi zachodzić $a_{n+1} - a_n > 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0$$

Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy ciągiem zbieżnym. Inne ciągi nazywamy rozbieżnymi . Jeśli ciąg dąży do $+\infty$ nazywamy go ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności. Jeśli ciąg dąży do $-\infty$ nazywamy go ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności.

Definicja 3. Liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n), jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla $n > n_0$ jest spełniona nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. O ciągu, który ma granicę g, mówimy, że jest zbieżny do liczby g. Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Innymi słowy, przy wyborze dowolnie małej odległości ε wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach są oddalone od g o mniej niż ε. O tym, czy ciąg jest zbieżny decydują nie początkowe wyrazy, ale te o dużych numerach.

Przykład: Ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny do 0.

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ należy wskazać takie n_0, że dla $n > n_0$ jest spełniona nierówność $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

$\frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Twierdzenia:

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę $a+b$.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n - b_n\}$ ma granicę a-b.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b, to ciąg $\{a_n \cdot b_n\}$ ma granicę $a{\cdot}b$.

- Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b i żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani jego granica nie równa się zeru, to ciąg ilorazów to ciąg $\{a_n/b_n\}$ ma granicę a/b.

- Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej n, to granica takiego ułamka przy $n \to \infty$ równa się ilorazowi współczynników przy najwyższych potęgach n.

- Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż licznik, to granica takiego ułamka przy $n \to \infty$ równa się zeru.

- Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n niż mianownik, to wartość bezwzględna takiego ułamka przy $n \to \infty$ dąży do plus nieskończoności.

- Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = q^n$ ma skończoną granicę równą zeru dla $-1 < q < 1$ oraz równą 1 dla $q = 1$.

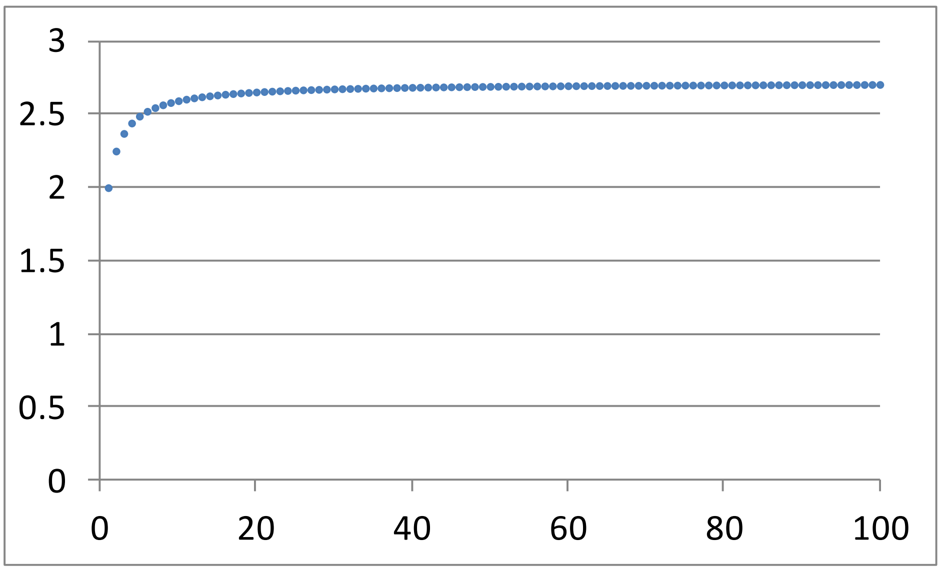
- Twierdzenie o trzech ciągach. Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{c_n\}$ spełniają dla dowolnego n nierówność $a_n \le b_n \le c_n$ i jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{c_n\}$ mają wspólną granicę $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg $\{b_n\}$ ma tę samą granicę, $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdy $a > 0$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

W ogólności wzór ten można zapisać jako: $\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$

Liczba *e* to liczba Eulera. Jest niewymierna *e* =2,718281828459…



Przykład 5:

$a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4$

Ciąg $\{a_n\}$ ma granicę e^4, gdy $n \to \infty$

Liczba *e* jest podstawą logarytmów naturalnych. Funkcja wykładnicza o podstawie e jest odwrotną do logarytmu naturalnego:

$$lne^x = x$$

$$e^{lnx} = x$$

WolframAlpha

granica ciągu $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n$

```
limit(4*n^2+5*n-7)^0.5-2*n as n->infinity

Wcisnąć „="
```

granica ciągu

```
limit (1+1/n)^n as n->infinity

Wcisnąć „="
```

wykres dla n od 1 do 50:

```
discreteplot (4*n^2+5*n-7)^0.5-2*n, {n,1,50}

Wcisnąć „="
```