Kolokwium nr. 1

Działania na macierzach

Obliczanie wyznacznika

Macierz odwrotna

Rozwiązywanie układu równań przy pomocy macierzy odwrotnej

SZEREGI

Szereg liczbowy nieskończony

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$\vdots$$

$u_1, u_{2,}$ ... – wyrazy szeregu

u_n – wyraz ogólny szeregu

s_n – sumy cząstkowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Jeżeli ciąg sum cząstkowych $s_1, s_2, \ldots s_n$ jest zbieżny, czyli ma skończoną granicę, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Jeżeli ciąg sum cząstkowych $s_1, s_2, \ldots s_n$ jest rozbieżny, czyli ma nieskończoną granicę lub jej nie ma, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Przykład szeregu rozbieżnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4$$

Przykład szeregu zbieżnego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{1}{2}$$

Twierdzenie:

Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest, aby jego wyraz ogólny u_n dążył do zera

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny i jego suma równa się s, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ jest zbieżny przy założeniu że c jest stałe, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$ jest rozbieżny jeśli $c \neq 0$.

Ważniejsze szeregi:

- szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$, czyli $-1 < q < 1$ wtedy jego suma wynosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

jest rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$, czyli $q \leq -1 \; lub \; q \geq 1$

- szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

jest rozbieżny do ∞

Dowód:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \cdots \geq$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + (\frac{1}{32} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

- szereg harmoniczny rzędu $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots$$

jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$

jest rozbieżny, gdy $\alpha \leq 1$

gdy $\alpha = 1$ jest to szereg harmoniczny

Grupy szeregów:

- szeregi o wyrazach nieujemnych, np.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} = 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2} + \cdots$$

- szeregi przemienne, z wyrazami dodatnimi i ujemnymi występującymi na przemian

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n = -2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 + \cdots - 2^n + \cdots$$

- inne

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}n = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 \ldots$$

Kryteria zbieżności szeregów

Kryterium porównawcze zbieżności szeregów: Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdzie $u_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \leq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również zbieżny.

Kryterium porównawcze rozbieżności szeregów: Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ gdzie $u_n \geq 0$, można wskazać taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ gdzie $v_n \geq 0$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $u_n \geq v_n$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest również rozbieżny.

Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów. Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) iloraz dowolnego wyrazu u_{n+1} i wyrazu go poprzedzającego jest stale mniejszy od pewnej liczby p mniejszej niż 1 to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < p < 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny

Kryterium d'Alemberta rozbieżności szeregów. Jeżeli w szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach dodatnich od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) iloraz dowolnego wyrazu u_{n+1} i wyrazu go poprzedzającego nie jest mniejszy od pewnej liczby p mniejszej niż 1 to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny

Jeżeli $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ dla każdego $n \geq N$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny lub rozbieżny i należy stosować inne kryteria badania zbieżności.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów. Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o wyrazach nieujemnych istnieje taka liczba $p < 1$, że począwszy od pewnego N (dla każdego $n \geq N$) zachodzi nierówność $\sqrt[n]{u_n} < p < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Kryterium Cauchy'ego rozbieżności szeregów. Jeżeli dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dla nieskończenie wielu wartości n (niekoniecznie dla wszystkich) zachodzi nierówność $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest rozbieżny.

Jeżeli $\sqrt[n]{u_n} = p = 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest zbieżny lub rozbieżny i należy stosować inne kryteria badania zbieżności.

Przykład: Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Pierwsze wyrazy ciągu:

$$\frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!} + \frac{6^5}{5!} + \frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} + \frac{6^8}{8!} + \cdots = 6 + 18 + 36 + 54 + 64\frac{4}{5} + 64\frac{4}{5} + 55\frac{19}{35} + 41\frac{23}{35} + \cdots =$$

$$u_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \qquad u_n = \frac{6^n}{n!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{6^n}{n!} = \frac{6^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{6^n} = \frac{6 \cdot 6^n}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{6^n} = \frac{6}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Szereg jest zbieżny.

Przykład. Oblicz jaką wartość liczbową przedstawia ułamek okresowy:

$$0,(45)$$

Rozwiązanie

$$0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,00000045 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{100^n}$$

Jest to szereg geometryczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

gdzie $a = 0{,}45, q = 0{,}01$, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}45 \cdot 0{,}01^{n-1} = \frac{0{,}45}{1-0{,}01} = \frac{5}{11}$$

WolframAlpha

Liczenie sumy szeregu:

sum 1/n^2, n=1 to infinity Wcisnąć „=”

WYRAŻENIA NIEOZNACZONE

Przy liczeniu granicy ciągu lub funkcji można otrzymać następujące wyrażenia nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [0 \cdot \infty], \quad [\infty^0], \quad [1^\infty], \quad [0^0]$$

Przykład:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^3$$

Natomiast oznaczone są następujące wyrażenia (a dowolna dodatnia liczba rzeczywista $a \epsilon R_+$):

$$[+\infty + a] = \infty$$

$$[-\infty + a] = -\infty$$

$$[+\infty - a] = \infty$$

$$[-\infty - a] = -\infty$$

$$[+\infty \cdot a] = \infty$$

$$[-\infty \cdot a] = -\infty$$

$$[+\infty \cdot (-a)] = -\infty$$

$$[-\infty \cdot (-a)] = +\infty$$

$$[+\infty \cdot (+\infty)] = \infty$$

$$[-\infty \cdot (-\infty)] = \infty$$

$$[+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$$

$$[-\infty \cdot (+\infty)] = -\infty$$

$$\left[\frac{a}{+\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\frac{a}{-\infty}\right] = 0^-$$

$$\left[\frac{-a}{+\infty}\right] = 0^-$$

$$\left[\frac{-a}{-\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\frac{a}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\left[\frac{a}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\left[\frac{-a}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\left[\frac{-a}{0^-}\right] = +\infty$$

$$[\infty^a] = \infty$$

$$[\infty^\infty] = \infty$$

gdzie symbol $[0^+]$ oznacza granicę funkcji o wartościach dodatnich, która wynosi zero, a symbol $[0^-]$ granicę funkcji o wartościach ujemnych, która wynosi zero.

FUNKCJE

Jeżeli każdej liczbie x z jednego zbioru zostanie przyporządkowana jedna liczba y z drugiego zbioru, to mówimy, że została określona pewna funkcja:

$$y = f(x)$$

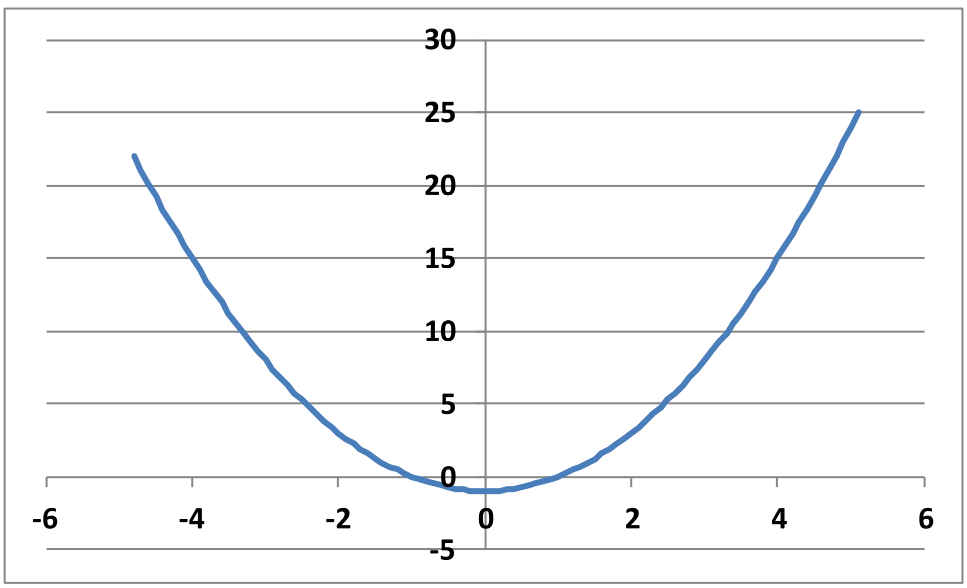
Liczbę x nazywamy argumentem funkcji, a liczbę y wartością funkcji y.

Zbiór argumentów funkcji nazywa się dziedziną funkcji.

Przykład:

$$f(x) = x^2 - 1$$

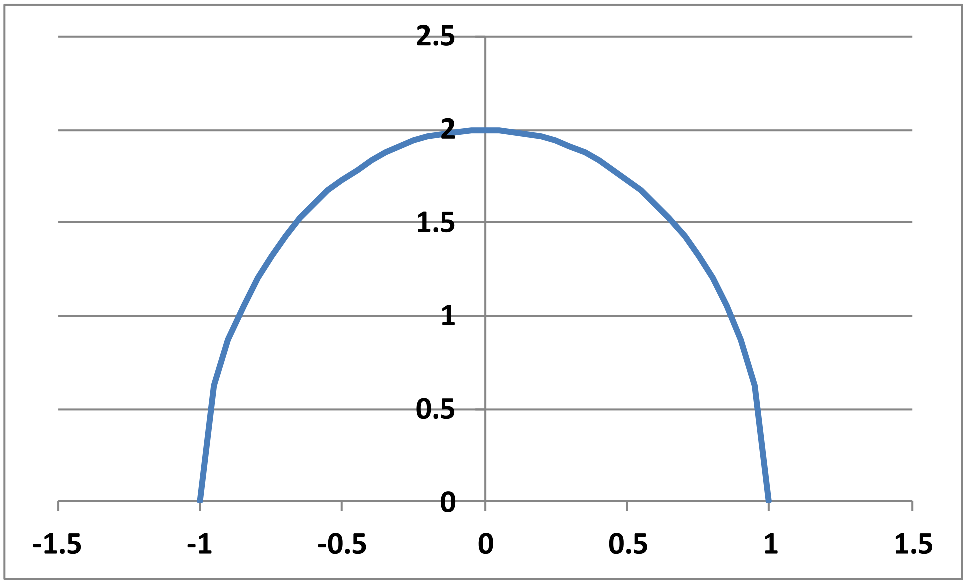
Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, czyli $x \in R$ lub $-\infty < x < \infty$.



Przykład:

$$f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

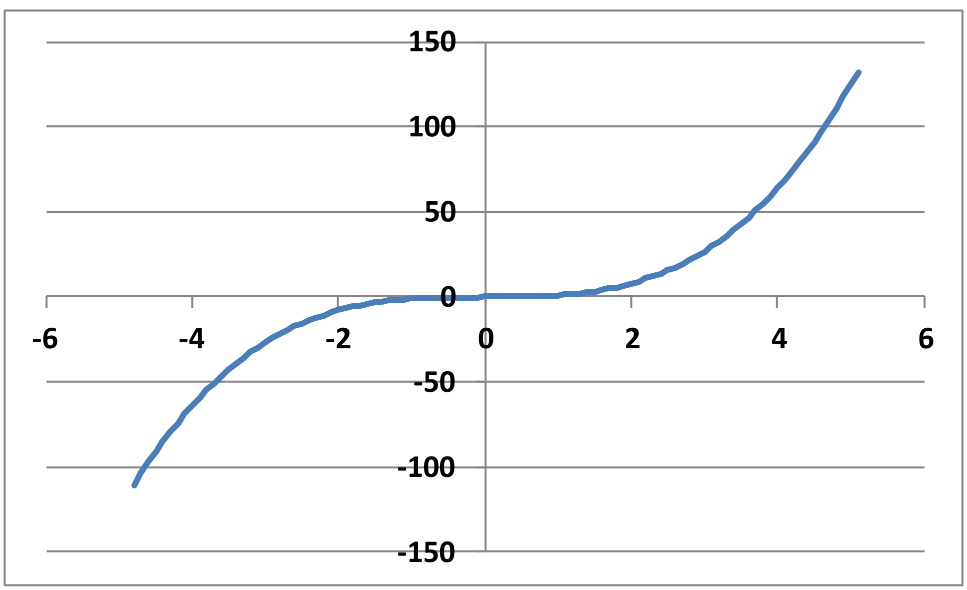
Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych, które $-1 \leq x \leq 1$.



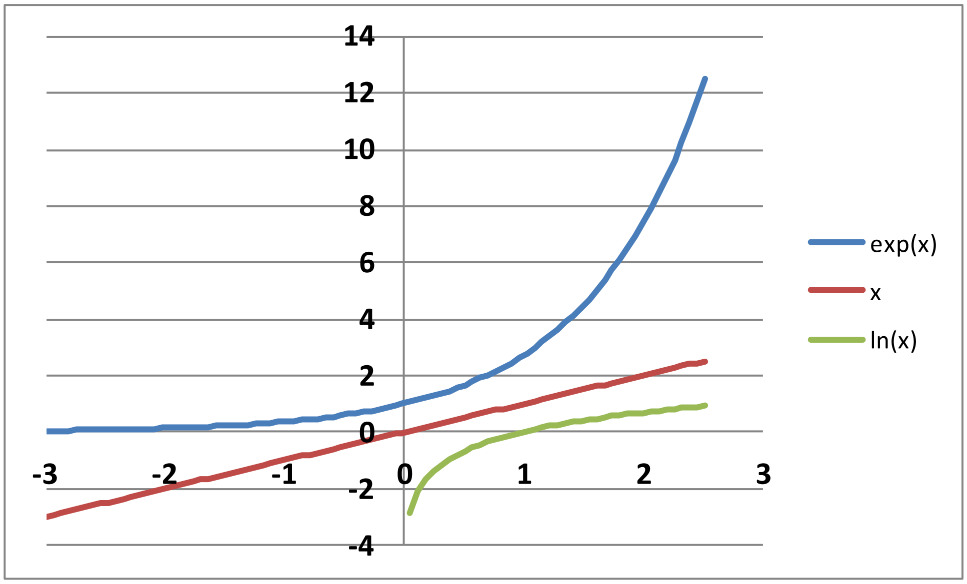
Przykład:

$$f(x) = x^3$$

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, czyli $x \in R$ lub $-\infty < x < \infty$.



Przykład: Funkcja odwrotna



$$exp(x) = e^x$$

$$\ln(x) = lnx = \log_e x$$

GRANICE FUNKCJI

Lewostronna granica funkcji:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Prawostronna granica funkcji:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą w punkcie $x = x_0$, jeśli istnieje granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ i jest ona równa $f(x_0)$.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, to mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcje x_0 asymptotę pionową.

Jeżeli $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, to mówimy, że prosta $y = a$ stanowi asymptotę poziomą funkcji $f(x)$.

Przykład: Wyznaczyć granice funkcji $f(x)$ przy $x \to +\infty$, $x \to -\infty$,

oraz w punktach $x = 2$ i $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

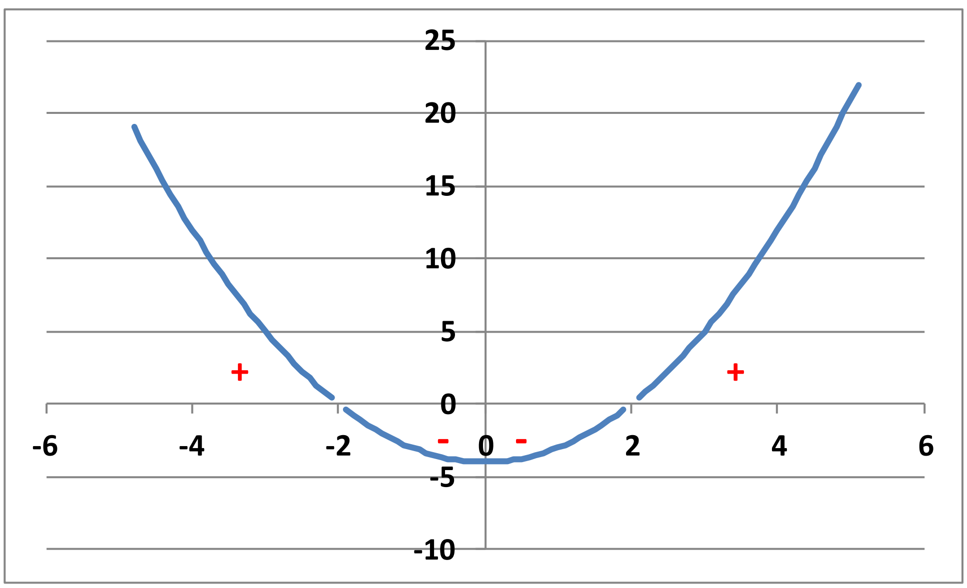
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0$$

Istnieje asymptota pozioma $y = 0$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}$$

Wykres mianownika $f(x) = (x-2)(x+2)$:



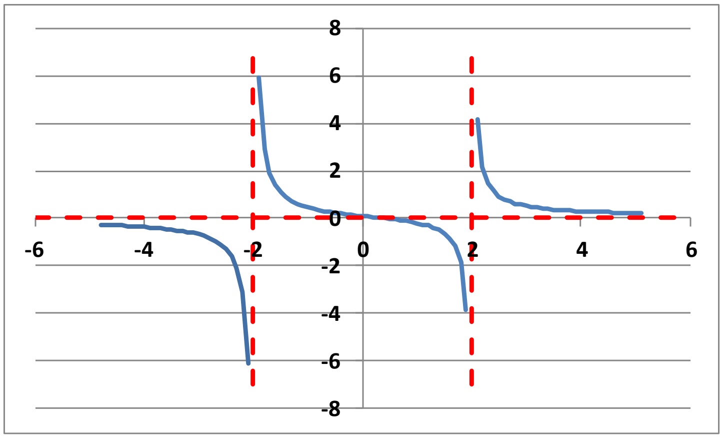
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Istnieją asymptoty pionowe $x = -2$ i $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Przykład:

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja nie ma miejsc zerowych. Nie ma takiej wartości x_0, dla której $f(x_0) = 0$.

$$f(x = 0) = \frac{1}{2}$$

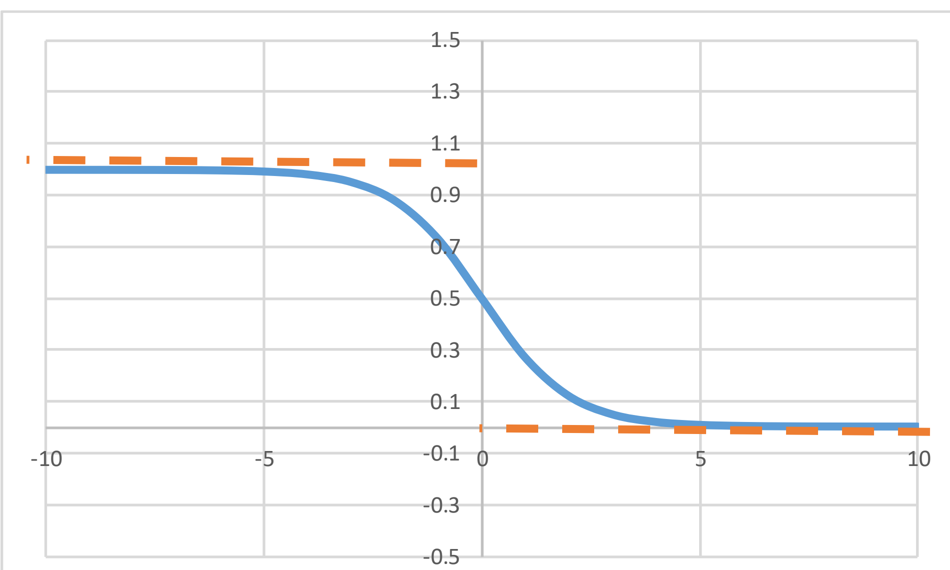
Sprawdzamy istnienie asymptot poziomych:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$$

$\Rightarrow$

Istnieje asymptota pozioma
lewostronna $y = 1$
i
prawostronna $y = 0$.



Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f należących do przedziału (a, b), ale różnych od x_0, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ wartości funkcji jest zbieżny do granicy g. Piszemy wtedy $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli są spełnione następujące warunki:

x_0 należy do dziedziny funkcji f,

istnieje skończona granica funkcji, przy x dążącym do x_0,

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Przykład. Funkcja $y = x^2$ jest ciągła w punkcie x_0=2.

x_0 należy do dziedziny funkcji f, $f(2) = 4$

istnieje skończona granica funkcji, przy x dążącym do x_0, $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

$f(2) = \lim_{x \to 2} x^2$