

## CIĄGI

Jeżeli każdej liczbie naturalnej  $n$  zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista  $a_n$ , to mówimy, że został określony nieskończony ciąg liczbowy. Ciąg zapisuje się w postaci:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  lub  $\{a_n\}$

Liczby  $a_1, a_2, \dots$  nazywa się wyrazami ciągu  $\{a_n\}$ , a  $a_n$  nazywa się wyrazem ogólnym ciągu.

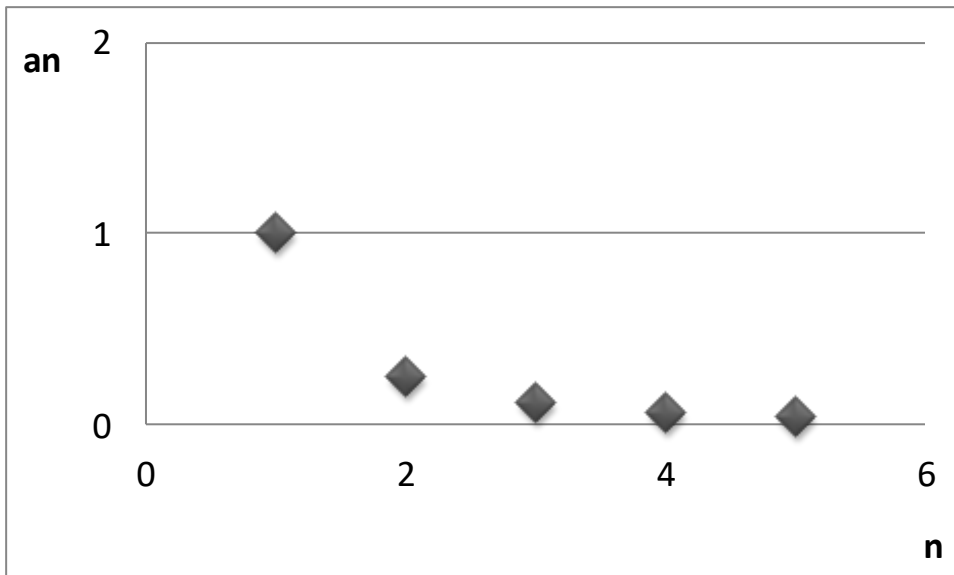
Ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $g$ , gdy przy  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n \rightarrow g$  lub  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

Przykład 1:  $a_n = \frac{1}{n^2}$

$n$	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow \infty$
$a_n$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	...	$\rightarrow 0$

Ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę 0, gdy  $n \rightarrow \infty$ ,

$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ , lub  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$



Przykład 2:

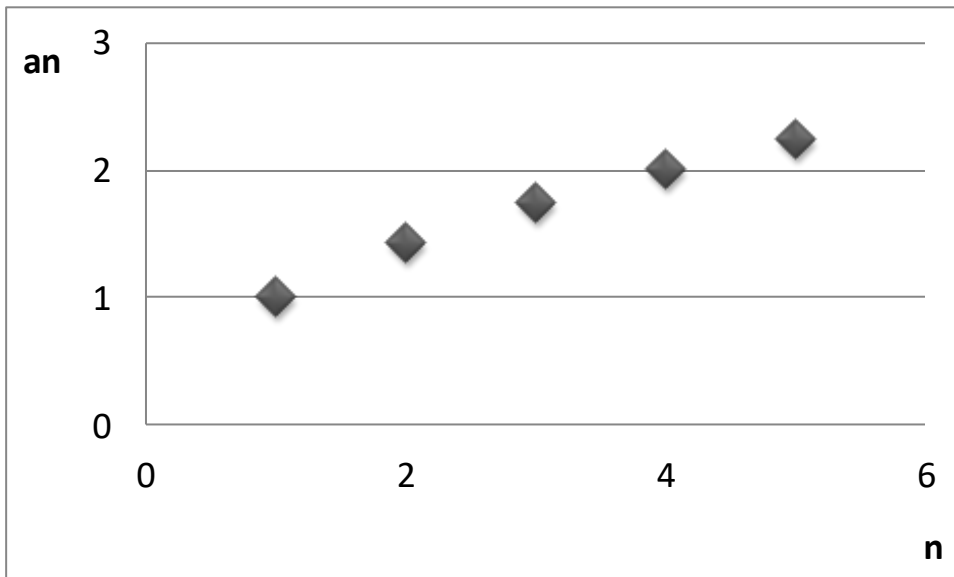
$$a_n = \sqrt{n}$$

$n$	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow \infty$
$a_n$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	...	$\rightarrow \infty$

Ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $\infty$ , przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$\sqrt{n} \rightarrow \infty$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ,

lub  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$



Przykład 3:

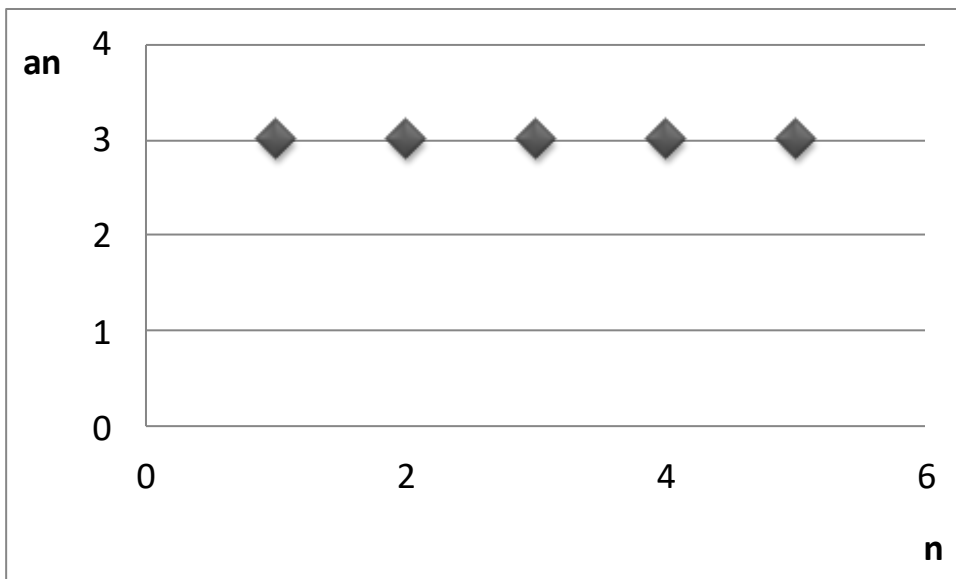
$$a_n = 3$$

$n$	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow \infty$
$a_n$	3	3	3	3	3	...	$\rightarrow 3$

Ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę 3, przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$3 \rightarrow 3$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ ,

lub  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$

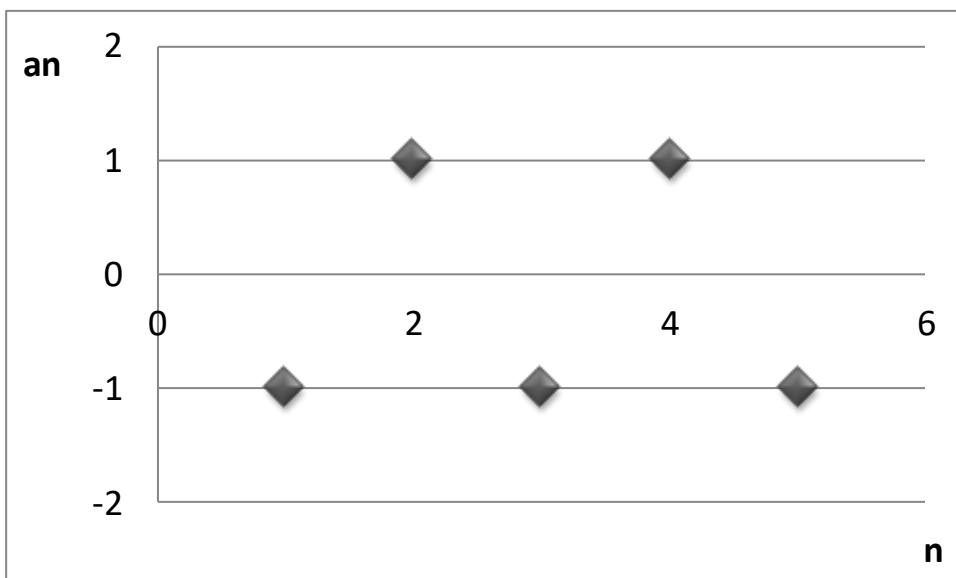


Przykład 4:

$$a_n = (-1)^n$$

$n$	1	2	3	4	5	...	$\rightarrow \infty$
$a_n$	-1	1	-1	1	-1	...	$\rightarrow ?$

Ciąg  $\{a_n\}$  nie wiadomo jaką ma granicę, gdy  $n \rightarrow \infty$



## DEFINICJE:

Definicja 1. Ciąg jest określony rekurencyjnie, gdy podana jest wartość pierwszego wyrazu (lub kilku pierwszych wyrazów), na podstawie której wyznaczany jest kolejny wyraz ciągu przy pomocy sformułowanego wzoru.

Ciąg arytmetyczny: dane są liczby  $a$  i  $r$

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$$

Ciąg geometryczny: dane są liczby  $a$  i  $q$

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego: od trzeciego wyrazu ciągu, każdy wyraz jest sumą dwóch poprzednich wyrazów

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Przykład: Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 5a_n - 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

$n$	1	2	3	4	5
$a_n$	1	2	7	32	157

Przykład: Obliczyć pięć początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{cases}$$

$n$	1	2	3	4	5
$a_n$	1	2	2	1	$\frac{1}{2}$

Przykład: Określić rekurencyjnie ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , na podstawie:

$$a_1 = -1, a_7 = -13$$

Rozwiązanie:  $a_2 = -1 + r, a_3 = -1 + r + r, a_4 = -1 + r + r + r, \dots, a_n = -1 + (n - 1) \cdot r$

$$a_7 = -1 + 6 \cdot r = -13 \Rightarrow (7 - 1) \cdot r = -12 \Rightarrow r = -2$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$$

Przykład: Określić rekurencyjnie ciąg geometryczny  $(a_n)$ , na podstawie:

$$a_2 \cdot a_3 = 432, \quad a_4 = 108$$

$$a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_1 \cdot r \cdot r, a_4 = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r, \dots, a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_2 \cdot a_3 = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r \cdot r = a_1^2 \cdot r^3 = 432$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 108$$

$$a_1 \cdot r = \frac{108}{r^2}$$

$$a_1^2 \cdot r^2 = \frac{432}{r} = \frac{11664}{r^4} \Rightarrow r = 3 \text{ i } a = 4$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n \cdot 3 \end{cases}$$

Definicja 2. Ciąg nieskończony  $(a_n)$  nazywa się rosnącym jeśli  $a_{n+1} > a_n$  dla każdego  $n$ . Ciąg nieskończony  $(a_n)$  nazywa się malejącym jeśli  $a_{n+1} < a_n$  dla każdego  $n$ .

Ciąg nieskończony  $(a_n)$  nazywa się niemalejącym jeśli  $a_{n+1} \geq a_n$  dla każdego  $n$ . Ciąg nieskończony  $(a_n)$  nazywa się nierosnącym jeśli  $a_{n+1} \leq a_n$  dla każdego  $n$ .

Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywa się ciągami monotonicznymi.

Przykład: Udowodnić, że ciąg  $a_n = \frac{n}{n+1}$  jest ciągiem rosnącym.

Dla każdego  $n$  musi zachodzić  $a_{n+1} - a_n > 0$ .

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

Przykład: Udowodnić, że ciąg  $a_n = \frac{1}{n}$  jest ciągiem malejącym.

Dla każdego  $n$  musi zachodzić  $a_{n+1} - a_n > 0$ .

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0$$

Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy ciągiem zbieżnym. Inne ciągi nazywamy rozbieżnymi. Jeśli ciąg dąży do  $+\infty$  nazywamy go ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności. Jeśli ciąg dąży do  $-\infty$  nazywamy go ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności.

Definicja 3. Liczbę  $g$  nazywamy granicą ciągu  $(a_n)$ , jeżeli dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje taka liczba naturalna  $n_0$ , że dla  $n > n_0$  jest spełniona nierówność  $|a_n - g| < \varepsilon$ . O ciągu, który ma granicę  $g$ , mówimy, że jest zbieżny do liczby  $g$ . Piszemy wtedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ .

Innymi słowy, przy wyborze dowolnie małej odległości  $\varepsilon$  wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach są oddalone od  $g$  o mniej niż  $\varepsilon$ . O tym, czy ciąg jest zbieżny decydują nie początkowe wyrazy, ale te o dużych numerach.

Przykład: Ciąg  $\left(\frac{1}{n}\right)$  jest zbieżny do 0.

Dla każdej liczby  $\varepsilon > 0$  należy wskazać takie  $n_0$ , że dla  $n > n_0$  jest spełniona nierówność  $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ .

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

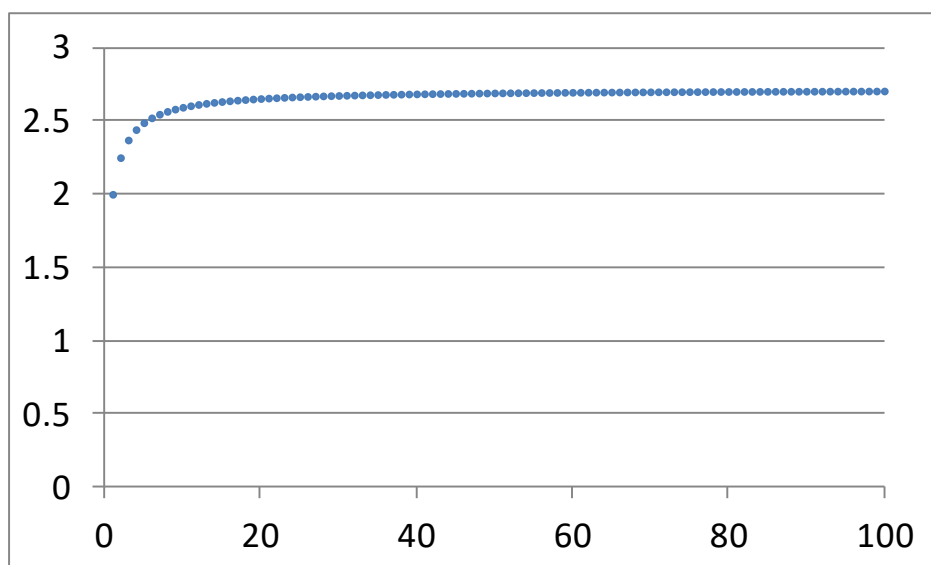
Twierdzenia:

- Jeżeli ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $a$  i ciąg  $\{b_n\}$  ma granicę  $b$ , to ciąg  $\{a_n + b_n\}$  ma granicę  $a+b$ .
- Jeżeli ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $a$  i ciąg  $\{b_n\}$  ma granicę  $b$ , to ciąg  $\{a_n - b_n\}$  ma granicę  $a-b$ .
- Jeżeli ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $a$  i ciąg  $\{b_n\}$  ma granicę  $b$ , to ciąg  $\{a_n \cdot b_n\}$  ma granicę  $a \cdot b$ .
- Jeżeli ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $a$  i ciąg  $\{b_n\}$  ma granicę  $b$  i żaden z wyrazów ciągu  $\{b_n\}$  nie równa się zeru, ani jego granica nie równa się zeru, to ciąg ilorazów to ciąg  $\{a_n/b_n\}$  ma granicę  $a/b$ .
- Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej  $n$ , to granica takiego ułamka przy  $n \rightarrow \infty$  równa się ilorazowi współczynników przy najwyższych potęgach  $n$ .
- Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej  $n$  niż licznik, to granica takiego ułamka przy  $n \rightarrow \infty$  równa się zeru.
- Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej  $n$  niż mianownik, to wartość bezwzględna takiego ułamka przy  $n \rightarrow \infty$  dąży do plus nieskończoności.
- Ciąg o wyrazie ogólnym  $a_n = q^n$  ma skończoną granicę równą zeru dla  $-1 < q < 1$  oraz równą 1 dla  $q = 1$ .
- Twierdzenie o trzech ciągach. Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów  $\{a_n\}$   $\{b_n\}$   $\{c_n\}$  spełniają dla dowolnego  $n$  nierówność  $a_n \leq b_n \leq c_n$  i jeżeli ciągi  $\{a_n\}$  i  $\{c_n\}$  mają wspólną granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ , to ciąg  $\{b_n\}$  ma tę samą granicę,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$ .

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , gdy  $a > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

W ogólności wzór ten można zapisać jako:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$

Liczba  $e$  to liczba Eulera. Jest niewymierna  $e = 2,718281828459\dots$



Przykład 5:

$$a_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4$$

Ciąg  $\{a_n\}$  ma granicę  $e^4$ , gdy  $n \rightarrow \infty$

Liczba  $e$  jest podstawą logarytmów naturalnych. Funkcja wykładnicza o podstawie  $e$  jest odwrotną do logarytmu naturalnego:

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$



## WolframAlpha

granica ciągu  $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n$

```
limit(4*n^2+5*n-7)^0.5-2*n as n->infinity
```

Wcisnąć „=”

granica ciągu

```
limit (1+1/n)^n as n->infinity
```

Wcisnąć „=”

wykres dla n od 1 do 50:

```
discreteplot (4*n^2+5*n-7)^0.5-2*n, {n,1,50}
```

Wcisnąć „=”