MACIERZE

UKŁADY RÓWNAŃ:

Zapis macierzowy układu równań liniowych:

Układ n równań liniowych:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Może zostać zapisany w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Odpowiada to zapisowi: $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywa się macierzą współczynników układu

Macierz X to macierz to macierz niewiadomych

Macierz B, to macierz wyrazów wolnych

TWIERDZENIE CRAMERA

Układ równań liniowych jest układem Cramera, gdy liczba równań jest równa liczbie jego niewiadomych oraz wyznacznik główny (macierzy współczynników układu) jest różny od zera.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jeżeli wyznacznik macierzy współczynników układu jest różny od zera (det A ≠ 0), to układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami:

$$x_i = \frac{W_i}{W}$$

gdzie: $W = detA$, czyli jest to wyznacznik macierzy współczynników układu, tzw. wyznacznik główny W_i jest to wyznacznik z macierzy, która powstaje z macierzy A, przez zastąpienie kolumny współczynników niewiadomej x_i przez kolumnę wyrazów wolnych.

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$W_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

zamiast i-tej kolumny
wstawiana jest kolumna
wyrazów wolnych

Pozostałe wyznaczniki W_i tworzy się w analogiczny sposób, zastępując odpowiednią kolumnę współczynników w macierzy, kolumną wyrazów wolnych.

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i przynajmniej jeden wyznacznik W_i jest różny od zera to układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i wszystkie wyznaczniki $W_i = 0$ to układ jest nieskończony (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

RZĄD MACIERZY

- Operacje elementarne na wierszach macierzy

Na wierszach (kolumnach) macierzy można wykonywać operacje dodawania odejmowania i mnożenia przez liczbę. Na przykład można dodać do jednego wiersza macierzy inny wiersz pomnożony przez liczbę.

Rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy. Inna definicja: Rzędem dowolnej macierzy A nazywamy taką liczbę naturalną r, że z macierzy A można wybrać przynajmniej jeden niezerowy minor stopnia r, natomiast wszystkie minory stopni większych od r, jeśli takie istnieją, są równe zero. Dla dowolnej niezerowej macierzy A zachodzi R(A)≥1. Wynika to z faktu, że każdy niezerowy element macierzy A jest jednocześnie jej minorem stopnia 1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[\substack{w_3=w_3-2w_2 \\ w_3=[0,6,-2]-2[0,3,-1]=[0,0,0]}]{} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(A)=2

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[\substack{w_3=w_3-2w_2 \\ w_3=[2,6,-2]-2[0,3,-1]=[2,0,0]}]{} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(B)=3

Własności rzędu macierzy:

- rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,
- rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n,
- rząd macierzy A^T, jest równy rzędowi macierzy A,
- rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,
- jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,
- jeśli dowolny wiersz (kolumnę) macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza (kolumny) to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli zamienimy dwa wiersze (kolumny) między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

UKŁAD *m* RÓWNAŃ LINIOWYCH O *n* NIEWIADOMYCH. TWIERDZENIE KRONECKERA-CAPELLI'EGO

Układ *m* równań liniowych o *n* niewiadomych:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Liczba równań może być mniejsza od liczby niewiadomych ($m<n$), może być równa liczbie niewiadomych ($m=n$) lub może być większa od liczby niewiadomych ($m>n$). To twierdzenie, nie daje nam gotowych wzorów jak wyznaczyć rozwiązania. Na jego podstawie, możemy tylko ocenić liczbę rozwiązań.

Macierz współczynników układu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz uzupełniona (rozszerzona) macierzy współczynników układu:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Aby można było rozwiązać układ równań, rząd macierzy A i macierzy U muszą być równe:

R(A)=R(U).

Gdy rząd tych macierzy:

- równa się liczbie niewiadomych n, układ ma jedno rozwiązanie,

- jest mniejszy od liczby niewiadomych, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które będą zależały od n-R(A) parametrów.

PRZYKŁAD:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases}$$

Macierz współczynników i macierz uzupełniona:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$detA = det \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$ R(A)=2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -84 \qquad \text{R}(U)=3$$

R(A) ≠ R(U) – Układ sprzeczny, nie ma rozwiązań.

PRZYKŁAD:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z - 6u = 7 \\ 5x - 10y + 20z = 12{,}5 \end{cases}$$

Macierz współczynników i macierz uzupełniona:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 \\ 5 & -10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 \qquad \text{R}(A)=2$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 & 7 \\ 5 & -10 & 20 & 0 & 12{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 \qquad \text{R}(U)=2$$

R(A) = R(U) – Układ da się rozwiązać.

Po lewej stronie równań zostają niewiadome, których współczynnik zostały wykorzystane do policzenia rzędu.

$$\begin{cases} 2x - 6u = 7 + 4y - 8z \\ 5x = 12{,}5 + 10y - 20z \end{cases}$$

y i z są w tym przypadku parametrami, mogą przyjmować dowolne, niezależne od siebie wartości.

$$x = 2{,}5 + 2y - 4z$$

$$u = -\frac{1}{3}$$

PRZYKŁAD:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Macierz współczynników i macierz uzupełniona:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$detU = det\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 0$$ R(U)<4

$$det\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$$ R(A) = R(U) = 3

$$\begin{cases} 5x + 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{7} \\ y = \dfrac{10}{7} \\ z = -\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

PRZYKŁAD:

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 3x + y = 14 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Macierz współczynników i macierz uzupełniona:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$detU = det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -147$$ R(U)=3

R(A)<3

Układ nie ma rozwiązań, jest sprzeczny.

MACIERZ ODWROTNA:

Macierzą odwrotną A^{-1} macierzy kwadratowej A nazywamy macierz, która spełnia równości:

$$AA^{-1} = I, \qquad A^{-1}A = I$$

Jeżeli macierz kwadratowa A jest macierzą nieosobliwą, tzn. detA≠0, to istnieje do niej dokładnie jedna macierz odwrotna A^{-1}.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$M = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to mnożąc stronami przez A^{-1} otrzymujemy:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

WolframAlpha

dodawanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

{{1,0},{3,5}}+{{1,3},{7,5}}

wcisnąć „="

transponowanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$

transpose {{1,0,2},{3,5,1}}

wcisnąć „="

mnożenie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$

{{1,0,2},{3,5,1}}*{{1,3},{7,5},{0,2}}

wcisnąć „="

potęgowanie macierzy: {{1,0},{5,1}}^3

{{1,0},{5,1}}^3

wcisnąć „="

wyznacznik macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

determinant{{1,0},{3,5}}

det{{1,0},{3,5}}

wcisnąć „="

macierz odwrotna macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

inverse{{1,0},{3,5}}

wcisnąć „="