RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE cd.

Zastosowanie równań różniczkowych do modelowania populacji w czasie ciągłym

Model Malthusa

Założenia modelu:

- populacja ma bardzo dobre warunki rozwoju, nieograniczony dostęp do pożywienia i miejsc lęgowych;

- obserwujemy jedynie proces rozmnażania;

- osobniki w danej populacji są jednakowe i podlegają jednakowym prawom;

- osobniki w danej populacji są równomiernie rozłożone w przestrzeni;

- osobnik rodzi się w pełni ukształtowany, zdolny do rozrodu i może rozmnażać się w dowolnym wieku;

- momenty rozmnażania są w dowolnym przedziale czasu rozłożone jednostajnie;
- każdy osobnik wydaje na świat potomstwo co τ jednostek czasu, τ jest ustalone i jednakowe dla wszystkich osobników;

- każdorazowo jeden rodzic ma λ osobników potomnych.

Średnia liczebność populacji $N(t)$ w chwili t.

Przyrost liczebności w krótkim czasie Δt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

jest proporcjonalny do λ osobników potomnych w liczbie τ jednostek czasu i do wielkości populacji w danej chwili:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau} N(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda}{\tau} N(t)$$

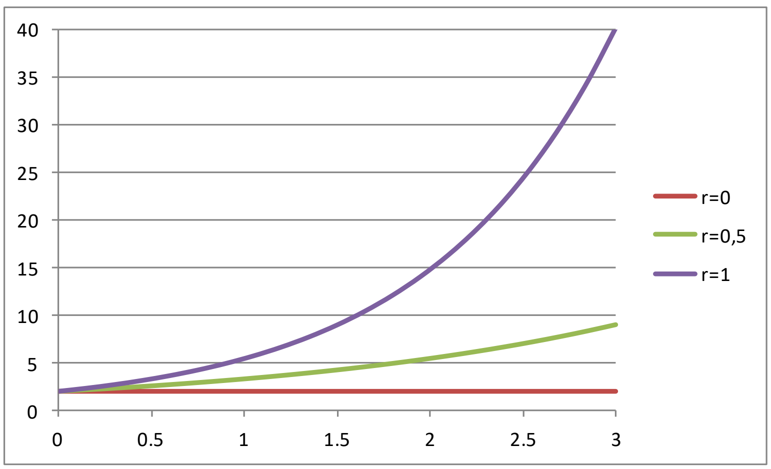
$r = \frac{\lambda}{\tau}$ współczynnik rozrodczości populacji

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)$$

zakładamy, że $N(t) = N_0$

rozwiązanie

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$



jeśli $r > 0 \quad \lim_{t\to\infty} N_0 e^{rt} = +\infty$

Procesy rozrodczości i śmiertelności

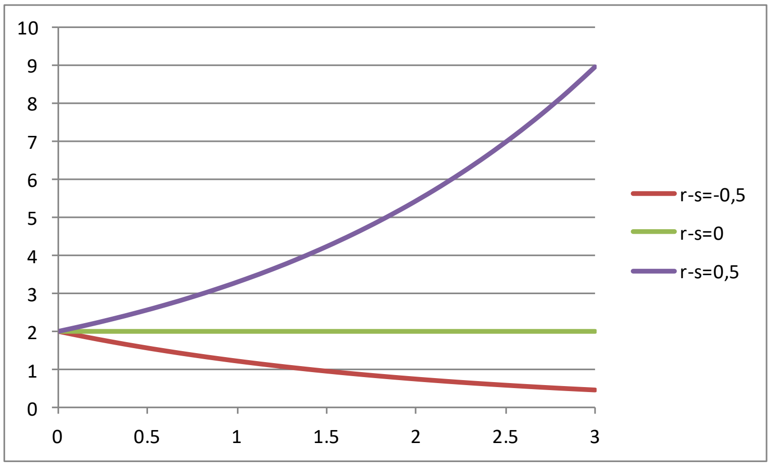
W modelu powinna być także uwzględniona śmiertelność osobników populacji:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) - sN(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = (r - s)N(t)$$

s - współczynnik śmiertelności populacji

$$N(t) = N_0 e^{(r-s)t}$$



Model Verhulsta

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N$$

K- stała charakteryzująca zasoby pożywienia

jeżeli $N > K$ populacja maleje

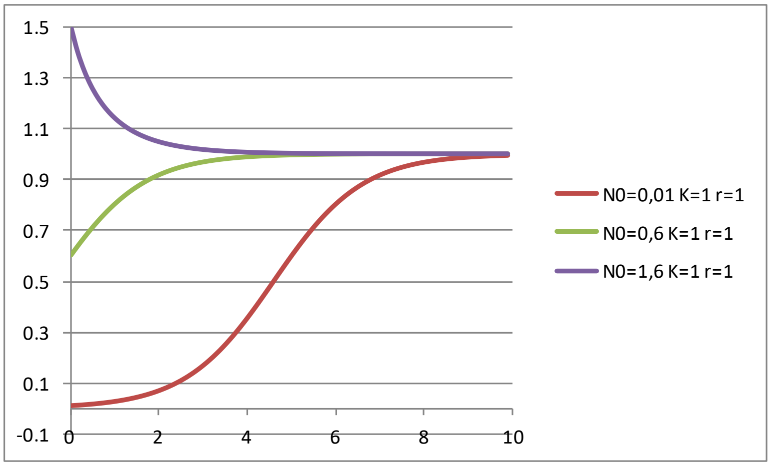
jeżeli $N < K$ populacja rośnie

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N$$

zakładamy, że $N(t = 0) = N_0$

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} = K$$



Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie

Urszula Foryś, Jan Poleszczuk

http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=mbm

Inne przykłady na zastosowanie równań różniczkowych

Prawo Newtona, które opisuje stygnięcie obiektu o temperaturze T[℃] w temperaturze otoczenia $T_{otoczenia}$[℃] ($T > T_{otoczenia}$), wyraża równanie różniczkowe:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{otoczenia})$$

Komisarz Halski znalazł zwłoki w basenie kąpielowym. Temperatura denata wynosiła $T_{denata}(t = 0) = 29{,}5℃$ a temperatura wody w basenie $T_{otoczenia} = 20℃$. Po dwóch godzinach oględzin ponownie zmierzono temperaturę pozostającego w wodzie ciała denata, która teraz wynosiła $T_{denata}(t = 2) = 23{,}5℃$. Obliczyć ile czasu upłynęło od śmierci do znalezienia zwłok.

Epidemia grypy w populacji liczącej 50000 osób rozprzestrzenia się według prawa Gompertza:

$$\frac{dy}{dt} = kye^{-0{,}03t}$$

Gdzie y(t) jest liczbą zarażonych osób. Załóżmy, że na początku było 100 chorych, a po 10 dniach 500. Ile osób będzie zarażonych po 20 dniach. Kiedy połowa populacji będzie zarażona?