MACIERZE

Macierz to prostokątna tablica zawierająca liczby, w której można wyróżnić wiersze i kolumny. Macierze zwykle oznacza się wielkimi literami np. A, B, C itd.

Poniższa macierz prostokątna ma *n* wierszy i *m* kolumn, czyli jest wymiaru *n* x *m*.

$$A_{n\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Element (wyraz macierzy) znajdujący się na przecięciu *i*-tego wiersza i *j*-tej kolumny oznaczamy a_{ij}.

Element $a_{1,4}$ znajduje się w pierwszym wierszu w czwartej kolumnie.

Element $a_{3,2}$ znajduje się w trzecim wierszu w drugiej kolumnie.

W macierzy ukryte są wektory poziome i pionowe.

Poziome:

$$\vec{v}_1=[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1m}]$$

$$\vec{v}_2=[a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2m}]$$

$$\vec{v}_n=[a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nm}]$$

Pionowe:

$$\vec{u}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \vec{u}_n=\begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Macierz, której liczba wierszy *n* i liczba kolumn *m* są równe (*n*=*m*) nazywa się macierzą kwadratową stopnia *n*.

Przykład:

Podaj wymiar następujących macierzy:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{2\times 3}$$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B_{3\times3}$, czyli macierz kwadratowa stopnia 3

$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ $C_{4\times1}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $D_{1\times4}$

$E = [3]$ $E_{1\times1}$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

- Dodawanie i odejmowanie macierzy

  Wymiary dodawanych lub odejmowanych macierzy muszą być takie same

$$A_{n\times m}+B_{n\times m} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m}-B_{n\times m} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1m}-b_{1m} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2m}-b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \dots & a_{nm}-b_{nm} \end{bmatrix}$$

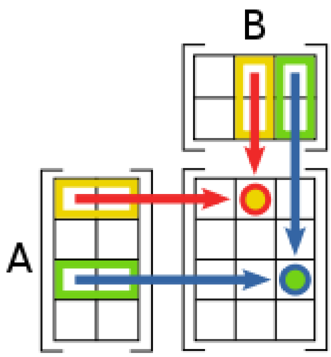
- Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k \cdot A_{n\times m} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Transponowanie macierzy

$$A_{n\times m}{}^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^{T} = C_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Mnożenie dwóch macierzy



https://pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie_macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 7 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 7 + 1\cdot 0 & 3\cdot 3 + 5\cdot 5 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Macierz jednostkowa *I*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{n\times m} \cdot I_m = A_{n\times m} = I_n \cdot A_{n\times m}$$

- Kolejność działań na macierzach:

  Mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem

  Transponowanie przed innymi działaniami

  Najpierw działania w nawiasach

- Prawa działań na macierzach:

  Prawo łączności dodawania: $(A + B) + C = A + (B + C)$,

  Prawo łączności mnożenia: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

  Prawo przemienności dodawania: $D + F = F + D$,

  Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $k(D + F) = k\,D + k\,F$,

  Mnożenie iloczynu macierzy przez liczbę: $k(DE) = (kD)E = D(kE)$,

  Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $(A + B)E = AE + BE$,

  Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $D(A + B) = DA + DB$,

  Prawo transponowania sumy: $(D + F)^T = D^T + F^T$,

  Prawo podwójnej transpozycji: $(F^T)^T = F$,

  Prawo transponowania iloczynu: $(FE)^T = E^T F^T$.

RZĄD MACIERZY

- Operacje elementarne na wierszach macierzy

Na wierszach (kolumnach) macierzy można wykonywać operacje dodawania odejmowania i mnożenia przez liczbę. Na przykład można dodać do jednego wiersza macierzy inny wiersz pomnożony przez liczbę.

Rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[w_3=[0,6,-2]-2[0,3,-1]=[0,0,0]]{w_3=w_3-2w_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(A)=2

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 6 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[w_3=[2,6,-2]-2[0,3,-1]=[0,0,0]]{w_3=w_3-2w_2}\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Rząd macierzy R(B)=3

Własności rzędu macierzy:

- rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,
- rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n,
- rząd macierzy A^T, jest równy rzędowi macierzy A,
- rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,
- jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,
- jeśli dowolny wiersz (kolumnę) macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza (kolumny) to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli zamienimy dwa wiersze (kolumny) między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

WYZNACZNIK MACIERZY

Każdej macierzy kwadratowej *A* przyporządkowujemy jednoznacznie liczbę tzw. wyznacznik macierzy *A* (ang. determinant):

$$detA_{n\times n}=\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Jeżeli wyznacznik macierzy *detA* =0, to macierz *A* nazywamy osobliwą.

Reguły obliczania wyznacznika:

$$det[a]=|a|=a$$

$$det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

Reguła Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \\ a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} \\ a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \end{matrix}$$

$$\overline{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}} \qquad \overline{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}}$$

Obliczanie wartości wyznaczników wyższych rzędów - Metoda Laplace'a

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} detA_{ij}$$

gdzie,

i - jest ustalone i określa wiersz macierzy, względem którego następuje rozwinięcie

a_{ij} - jest elementem macierzy w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

A_{ij} - jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}

Rozwinięcie według elementów drugiego wiersza:

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + a_{23}\cdot(-1)^{2+3}\cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$+a_{2n}\cdot(-1)^{2+n}\cdot det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

Przykłady:

Rozwinięcie według elementów trzeciego wiersza:

$$det\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)\cdot 21 + 6\cdot(-1)\cdot(-33) + 2\cdot 48 + 0\cdot(-1)\cdot 78 = 231$$

Rozwinięcie według elementów drugiej kolumny:

$$det\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot 11 + 0\cdot 0 + 6\cdot(-1)\cdot(-33) + 0\cdot 44 = 231$$

Metoda eliminacji Gaussa

Korzysta z własności wyznacznika macierzy - wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn).

Inne własności wyznaczników:

- wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy wyjściowej,
- jeżeli macierz posiada wiersz zerowy (kolumnę zerową), wówczas $detA = 0$,
- jeżeli macierz posiada dwa identyczne wiersze (kolumny), wówczas $detA = 0$,
- jeżeli jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), wówczas $detA = 0$,
- zamiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika,
- jeżeli w danej macierzy elementy danego wiersza lub kolumny zostaną przemnożone przez dowolną liczbę $k \neq 0$, wówczas wartość wyznacznika również zostanie przemnożona przez k^n, gdzie n jest stopniem macierzy
- zachodzi równość $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$
- wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn)

WolframAlpha

dodawanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

> {{1,0},{3,5}}+{{1,3},{7,5}}
>
> wcisnąć „="

transponowanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$

> transpose {{1,0,2},{3,5,1}}
>
> wcisnąć „="

mnożenie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$

{{1,0,2},{3,5,1}}*{{1,3},{7,5},{0,2}}

wcisnąć „="

potęgowanie macierzy: {{1,0},{5,1}}^3

{{1,0},{5,1}}^3

wcisnąć „="

wyznacznik macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

determinant{{1,0},{3,5}}

det{{1,0},{3,5}}

wcisnąć „="