

MACIERZE

Macierz to prostokątna tablica zawierająca liczby, w której można wyróżnić wiersze i kolumny. Macierze zwykle oznacza się wielkimi literami np. A, B, C itd.

Poniższa macierz prostokątna ma n wierszy i m kolumn, czyli jest wymiaru $n \times m$.

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Element (wyraz macierzy) znajdujący się na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny oznaczamy a_{ij} .

Element $a_{1,4}$ znajduje się w pierwszym wierszu w czwartej kolumnie.

Element $a_{3,2}$ znajduje się w trzecim wierszu w drugiej kolumnie.

W macierzy ukryte są wektory poziome i pionowe.

Poziome:

$$\vec{v}_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1m}]$$

$$\vec{v}_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2m}]$$

$$\vec{v}_n = [a_{n1} \quad a_{n2} \quad \dots \quad a_{nm}]$$

Pionowe:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \quad \vec{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Macierz, której liczba wierszy n i liczba kolumn m są równe ($n=m$) nazywa się macierzą kwadratową stopnia n .

Przykład:

Podaj wymiar następujących macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{3 \times 3}, \text{ czyli macierz kwadratowa stopnia 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad C_{4 \times 1}$$

$$D = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 4] \quad D_{1 \times 4}$$

$$E = [3] \quad E_{1 \times 1}$$

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

- Dodawanie i odejmowanie macierzy

Wymiary dodawanych lub odejmowanych macierzy muszą być takie same

$$\begin{aligned} A_{n \times m} + B_{n \times m} &= \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{n \times m} - B_{n \times m} &= \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nm} - b_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

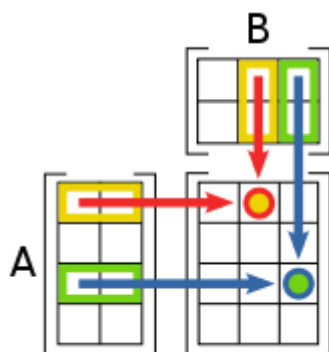
- Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k \cdot A_{n \times m} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1m} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & k \cdot a_{n2} & \dots & k \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Transponowanie macierzy

$$A_{n \times m}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^T = C_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Mnożenie dwóch macierzy



https://pl.wikipedia.org/wiki/Mno%C5%BCenie_macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

- Macierz jednostkowa I

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{n \times m} \cdot I_n = A_{n \times m} = I_m \cdot A_{n \times m}$$

- Kolejność działań na macierzach:

Mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem

Transponowanie przed innymi działaniami

Najpierw działania w nawiasach

- Prawa działań na macierzach:

Prawo łączności dodawania: $(A + B) + C = A + (B + C)$,

Prawo łączności mnożenia: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

Prawo przemienności dodawania: $D + F = F + D$,

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $k(D + F) = kD + kF$,

Mnożenie iloczynu macierzy przez liczbę: $k(DE) = (kD)E = D(kE)$,

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $(A + B)E = AE + BE$,

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $D(A + B) = DA + DB$,

Prawo transponowania sumy: $(D + F)^T = D^T + F^T$,

Prawo podwójnej transpozycji: $(F^T)^T = F$,

Prawo transponowania iloczynu: $(FE)^T = E^T F^T$.

RZĄD MACIERZY

- Operacje elementarne na wierszach macierzy

Na wierszach (kolumnach) macierzy można wykonywać operacje dodawania odejmowania i mnożenia przez liczbę. Na przykład można dodać do jednego wiersza macierzy inny wiersz pomnożony przez liczbę.

Rząd macierzy to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów będących wierszami (lub kolumnami) tej macierzy.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 = w_3 - 2w_2 \\ w_3 = [0, 6, -2] - 2[0, 3, -1] = [0, 0, 0]}]{=} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rząd macierzy } R(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 = w_3 - 2w_2 \\ w_3 = [2, 6, -2] - 2[0, 3, -1] = [0, 0, 0]}]{w_3 = w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Rząd macierzy } R(B)=3$$

Własności rzędu macierzy:

- rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej,
- rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n ,
- rząd macierzy A^T , jest równy rządowi macierzy A ,
- rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy,
- jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy,
- jeśli dowolny wiersz (kolumnę) macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza (kolumny) to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli zamienimy dwa wiersze (kolumny) między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie,
- jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

WYZNACZNIK MACIERZY

Każdej macierzy kwadratowej A przyporządkowujemy jednoznacznie liczbę tzw. wyznacznik macierzy A (ang. determinant):

$$\det A_{n \times n} = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jeżeli wyznacznik macierzy $\det A = 0$, to macierz A nazywamy osobliwą.

Reguły obliczania wyznacznika:

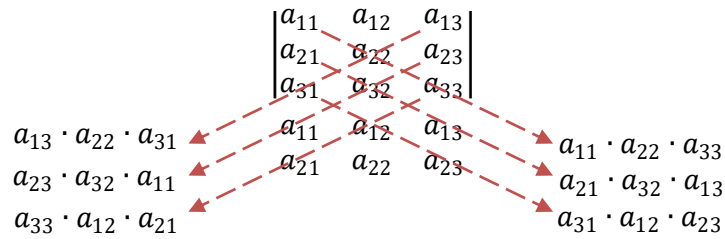
$$\det[a] = |a| = a$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

Reguła Sarrusa:



$$\overline{a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$\overline{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}}$$

Obliczanie wartości wyznaczników wyższych rzędów - Metoda Laplace'a

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det A_{ij}$$

gdzie,

i - jest ustalone i określa wiersz macierzy, względem którego następuje rozwinięcie

a_{ij} - jest elementem macierzy w i -tym wierszu i j -tej kolumnie

A_{ij} - jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}

Rozwinięcie według elementów drugiego wiersza:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$a_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \dots$$

$$+ a_{2n} \cdot (-1)^{2+n} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{bmatrix}$$

Przykłady:

Rozwinięcie według elementów trzeciego wiersza:

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \cdot 21 + 6 \cdot (-1) \cdot (-33) + 2 \cdot 48 + 0 \cdot (-1) \cdot 78 = 231$$

Rozwinięcie według elementów drugiej kolumny:

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & -2 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 11 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot (-33) + 0 \cdot 44 = 231$$

Metoda eliminacji Gaussa

Korzysta z własności wyznacznika macierzy - wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn).

Inne własności wyznaczników:

- wyznacznik macierzy transponowanej jest równy wyznacznikowi macierzy wyjściowej,
- jeżeli macierz posiada wiersz zerowy (kolumnę zerową), wówczas $\det A = 0$,
- jeżeli macierz posiada dwa identyczne wiersze (kolumny), wówczas $\det A = 0$,
- jeżeli jakiś wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), wówczas $\det A = 0$,
- zamiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika,
- jeżeli w danej macierzy elementy danego wiersza lub kolumny zostaną pomnożone przez dowolną liczbę $k \neq 0$, wówczas wartość wyznacznika również zostanie pomnożona przez k ,
- zachodzi równość $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- wyznacznik macierzy nie zmienia wartości, jeżeli do wiersza (lub kolumny) macierzy dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (lub kolumn)

WolframAlpha

dodawanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

```
{{1,0},{3,5}}+{{1,3},{7,5}}
```

wcisnąć „=”

transponowanie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$

```
transpose {{1,0,2},{3,5,1}}
```

wcisnąć „=”

mnożenie macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 38 & 36 \end{bmatrix}$

$\{\{1,0,2\},\{3,5,1\}\} * \{\{1,3\},\{7,5\},\{0,2\}\}$

wcisnąć „=”

potęgowanie macierzy: $\{\{1,0\},\{5,1\}\}^3$

$\{\{1,0\},\{5,1\}\}^3$

wcisnąć „=”

wyznacznik macierzy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

determinant $\{\{1,0\},\{3,5\}\}$

det $\{\{1,0\},\{3,5\}\}$

wcisnąć „=”