

## Zadania - UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH. WZORY CRAMERA

**Uwaga.** Zadania z gwiazdką (\*) adresowane są do osób nadzwyczajnie zainteresowanych tematem.

**Zadanie 1.** Dany układ równań przedstaw w postaci macierzowej (zapisz macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  oraz równanie macierzowe). Rozwiąż układ równań przy użyciu wzorów Cramera. Sprawdź poprawność wyniku wykonując odpowiednie działania na macierzach.

$$\text{a) } \begin{cases} -2x_1 + 3x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -13 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -4 \\ -6x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + x_3 = -17 \\ -4x_2 + 3x_3 = 20 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

**Odpowiedzi:**

a)  $\mathbf{x}^T = [-3, 3, 2]$ , b)  $\mathbf{x}^T = [-2, -1, 2]$ , c)  $\mathbf{x}^T = [3, -2, 4]$ , d)  $\mathbf{x}^T = [1, 2, 3]$ , e)  $\mathbf{x}^T = [-1, 2, 0]$ .

**Zadanie 2.** Dla danych macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  rozwiąż układ równań  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  z zastosowaniem wzorów Cramera oraz sprawdź poprawność wyniku wykonując odpowiednie działania na macierzach.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Odpowiedzi:** a)  $\mathbf{x}^T = [1, 0, 2]$ , b)  $\mathbf{x}^T = [2, -3, 1]$ , c)  $\mathbf{x}^T = [3, 1]$ .

**Zadanie 3\*.** Dany układ równań przedstaw w postaci macierzowej (zapisz macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  oraz równanie macierzowe). Rozwiąż układ równań przy użyciu wzorów Cramera. Sprawdź poprawność wyniku wykonując odpowiednie działania na macierzach.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

**Odpowiedź:**  $\mathbf{x}^T = [3, -2, 1, -3]$ .

## Zadania - UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH. WZORY CRAMERA

---

**Zadanie 4\***. Rozwiąż dany układ równań. Sprawdź poprawność wyniku wykonując odpowiednie działania na macierzach. Zadanie wykonaj z zastosowaniem programu *Maxima-online*.

$$\text{a) } \begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_2 + 2x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -16 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 16 \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 12 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 28 \end{cases}$$

## Zadania - UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH. WZORY CRAMERA

Rozwiązywanie układu równań z zastosowaniem programu wxMaxima online ze strony internetowej [maxima.cesga.es](http://maxima.cesga.es)

**Przykład.** Podaj rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ -4x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

W oknie instrukcji można wprowadzić nazwę układu równań, np. **uklad\_rownan** - jak poniżej. Po dwukropku, w nawiasach kwadratowych należy zapisać kolejne równania, rozdzielając je przecinkami, a na końcu linii z nazwą układu wstawić średnik.

Rozwiązanie oblicza instrukcja **solve**. Po wpisaniu instrukcji, w nawiasach okrągłych wprowadza się najpierw nazwę układu lub bezpośrednio układ równań, a następnie nazwy niewiadomych rozdzielone przecinkami i zapisane we wspólnych nawiasach kwadratowych. Na końcu linii z instrukcją należy wstawić średnik. Obliczenia uruchamia się klikając przycisk **Clic** umieszczony pod oknem instrukcji.

```
uklad_rownan: [-3*x1-2*x2=4 , -4*x1+x2=-2 ] ;
solve( uklad_rownan , [ x1 , x2 ] );
```

Clic Clear

Poniżej okna instrukcji pojawia się wynik:

- linia oznaczona (i1) (od *input* - wprowadzone) z układem równań wprowadzonym do programu,
- linia oznaczona o1 (od *output* - wynik) z poleceniem wykonanym przez program,
- linia i2 z poleceniem rozwiązania układu równań wprowadzonym do programu,
- linia o2 z poleceniem wykonanym przez program (rozwiązaniem układu równań).

```
(%i1) uklad_rownan: [-3*x1-2*x2=4 , -4*x1+x2=-2 ] ;
(%o1) [-2 x2 - 3 x1 = 4, x2 - 4 x1 = -2]

(%i2) solve(uklad_rownan , [ x1 , x2 ] );
(%o2) [[x1 = 0, x2 = -2]]
```

Wynik wyświetlany jest jako wektor (w nawiasach kwadratowych) i oznacza, że rozwiązaniem układu jest para liczb  $x_1=0$ ,  $x_2=-5$ .