

Zadania – GRANICA CIĄGU

Uwaga. Zadania od 19) włącznie stanowią materiał nadobowiązkowy i adresowane są do osób nadzwyczajnie zainteresowanych tematem.

Wskazówki. W przykładach:

10) – 21) zastosuj przekształcenie: licznik i mianownik podziel przez n w najwyższej potędze, która występuje w mianowniku,

22) – 25) skorzystaj ze wzorów: $\frac{\sqrt{a}}{n} = \sqrt{\frac{a}{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{n} = \sqrt[3]{\frac{a}{n^3}}$,

26) – 29) skorzystaj ze wzoru: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k = a^k$, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

30) – 35) skorzystaj ze wzoru $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$,

40) – 45) skorzystaj z tw. o 3 ciągach: Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) mają jednakową granicę $\lim a_n = \lim b_n = g$, a ponadto dla każdego n zachodzi $a_n \leq c_n \leq b_n$, to $\lim c_n = g$.

46) – 47) skorzystaj ze wzoru: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, gdy $a_n \rightarrow +\infty$.

Zadania. Oblicz granicę.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 3n + 2)$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^2 - 3n + 4)$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1)(-3n + 2)$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2)(2n^3 + 5)$ 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n - n^2)$ 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^2 - n + 3)$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^5 - 4n^3 + 3n)$ 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n - 1}$ 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{(n + 1)\sqrt{n}}$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n^2 + 5}$ 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-2n - 5}$ 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 - n^2 + 2}{2n + 3}$

13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 3}{4n + 1}$ 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 - 5}$ 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 3}$

16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4}{2n^2 + 3}$ 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3 + 1}{3n^3 + 1}$ 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2}{-2n^4 - 1}$

19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)(n + 3)}{(-2n + 1)(3n + 2)}$ 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(n^3 + 3)}{(n + 1)(-3n^4 + 1)}$ 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 3)^2}{(3n^2 + 1)(-3n^4 + 1)}$

22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 9}}{6n + 1}$ 23) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{3n - 2}$ 24) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n} + 4n}{2n - 1}$

25) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 9}}{\sqrt[3]{27n^3 + 8}}$ 26) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n + 3}{2n + 1} \right)^3$ 27) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 5}{-3n + 1} \right)^4$

28) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^3 + 2n^2 + 1}{8n^3 + 5n - 2}}$ 29) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n + 1}{27n - 2}}$ 30) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 1})$

$$\begin{array}{lll}
31) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) & 32) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n) & 33) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 15}) \\
34) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3}) & 35) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 7n - 2n}} & 36) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} + 3}{4^n + 7} \\
37) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} - 7}{9^n + 4} & 38) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3} & 39) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \\
40) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} & 41) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} & 42) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8^n + 9^n + 10^n} \\
43) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n} & 44) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \frac{3}{n}} & 45) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3 \cdot 4^n + 1} \\
46) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n+1} & 47) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &
\end{array}$$

Obliczanie granicy ciągu z zastosowaniem programu *wxMaxima online*

Przykład. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{3n^2 - 2n}{-5n^2 + 2}$.

W oknie instrukcji można wpisać najpierw nazwę ciągu, np. „an”, jak w przykładzie poniżej, po niej dwukropek, wzór ciągu, a na końcu linii średnik.

Granice ciągu oblicza instrukcja **limit**. Po wpisaniu instrukcji, w nawiasach okrągłych najpierw wprowadza się nazwę ciągu „an” lub bezpośrednio wzór ciągu, następnie nazwę argumentu „n”, a potem „inf” oznaczające granicę dla n dążącego do nieskończoności (*ang.* infinity). Na końcu linii z instrukcją należy wstawić średnik. Obliczenia uruchamia się klikając przycisk **Clc** umieszczony pod oknem instrukcji.

```

an: ( 3*n^2-2*n ) / ( -5*n^2+2 );
limit ( an , n , inf );

```

Clc Clear

Poniżej okna instrukcji pojawia się wynik:

- linia oznaczona (i1) (od *input* – wprowadzone) ze wzorem na n -ty wyraz ciągu,
- linia oznaczona (o1) (od *output* – wynik) z poleceniem wykonanym przez program,
- linia (i2) z poleceniem obliczenia granicy ciągu,
- linia (i2) z poleceniem wykonanym przez program (obliczoną granicą).

```
(%i1) an: ( 3*n^2-2*n )/( -5*n^2+2 );
```

```
(%o1)  $\frac{3n^2-2n}{2-5n^2}$ 
```

```
(%i2) limit ( an , n , inf );
```

```
(%o2)  $-\frac{3}{5}$ 
```

Wynikiem w przykładzie jest liczba $-3/5$.

Jeżeli wynikiem jest nieskończoność, program wyświetla odpowiedź „inf” (skrót od *infinity*), a jeżeli minus nieskończoność, to wyświetla „minf”.

dr Anna Rajfura