Temat wykładu:

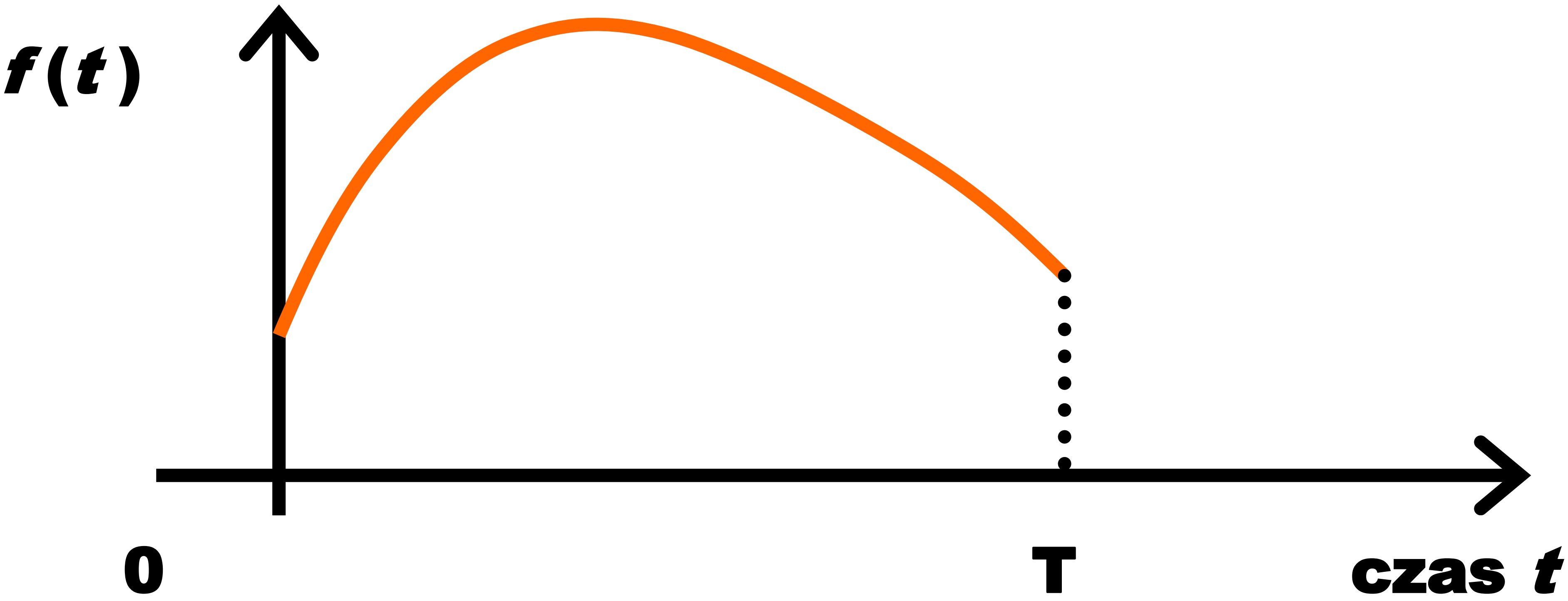
Modele wzrostu populacji w czasie ciągłym

Zagadnienia

1. Interpretacja pochodnej
2. Model Malthusa
3. Model Verhulsta

Niech

$y = f(t)$ - wielkość populacji w chwili t



Wprowadzenie cd.

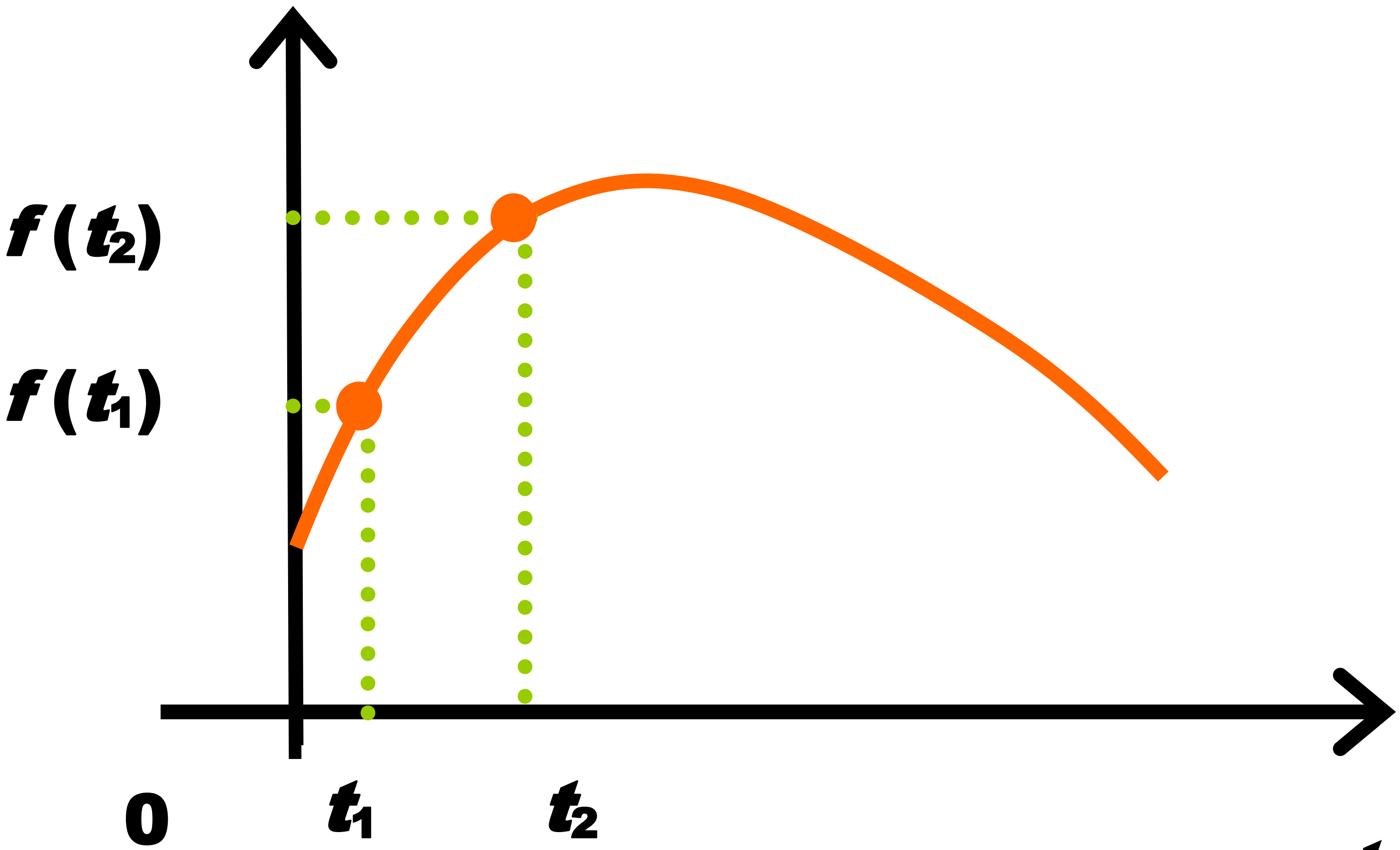
$f(t_1)$ – wielkość pop. w chwili t_1

$f(t_2)$ – wielkość pop. w chwili t_2

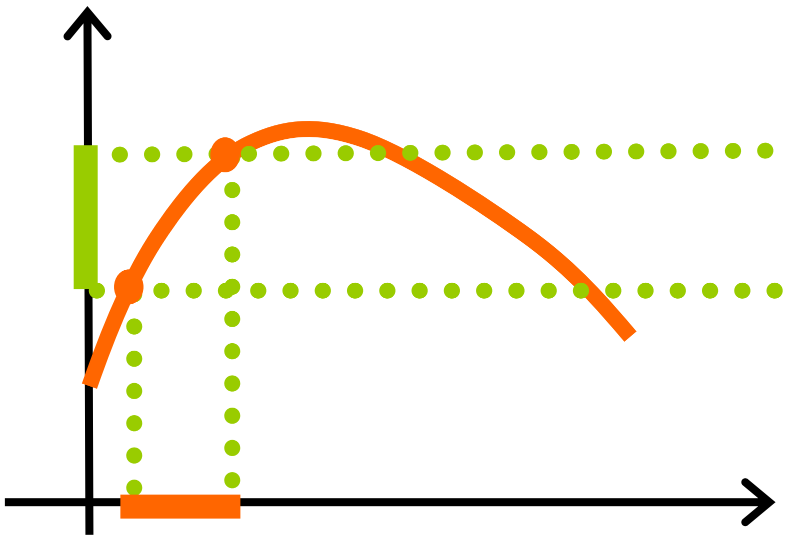
$f(t_2) - f(t_1)$ zmiana wielkości populacji (przyrost, spadek) w czasie od t_1 do t_2

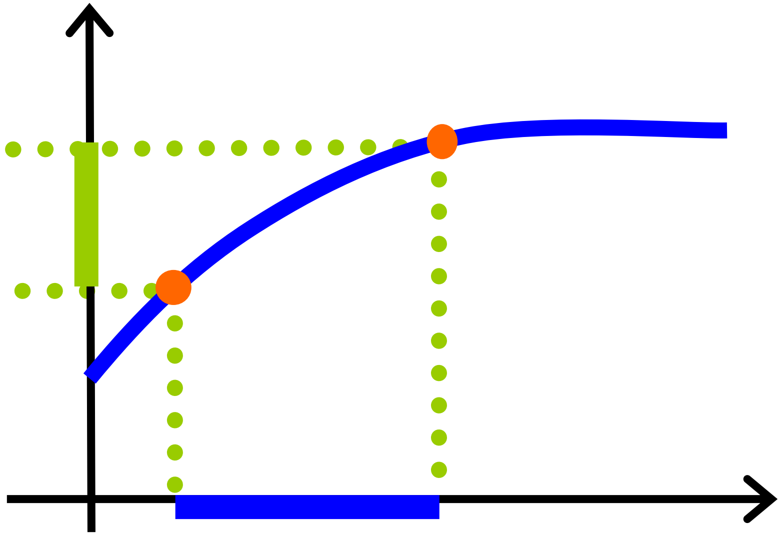
Wprowadzenie cd.

wielkość populacji $y = f(t)$



Wprowadzenie cd.





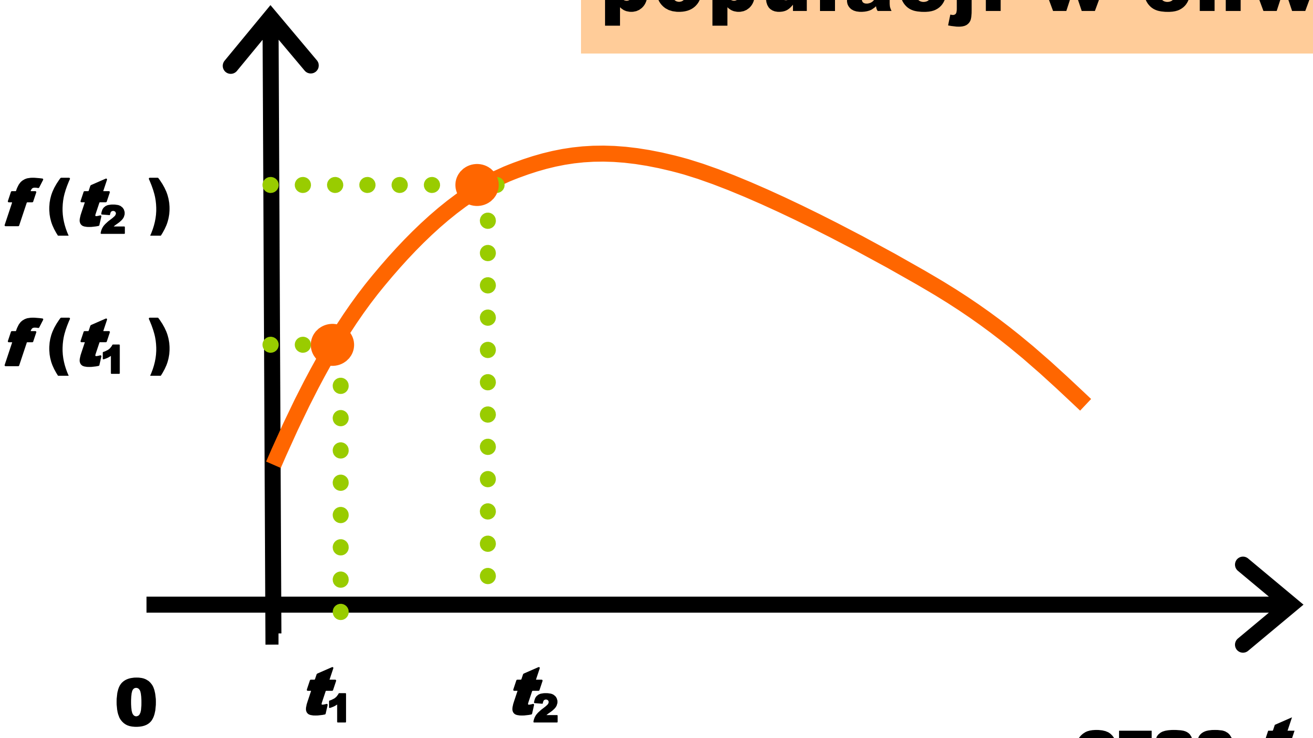
Wprowadzenie cd.

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

szybkość zmiany wielkości populacji

Wprowadzenie cd.

Gdy $t_2 \to t_1$, to $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ jest szybkością zmiany wielkości populacji w chwili t_1



Wprowadzenie cd.

$$\lim_{t_n \to t_0} \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = f'(t_0)$$

f ' (t)* - szybkość zmiany wielkości populacji w chwili *t

Model Malthusa

Szybkość zmiany wielkości populacji w chwili *t* jest wprost proporcjonalna* do wielkości populacji w chwili *t*.

*** - współczynnik proporcjonalności *r***

Model Malthusa cd.

Szybkość zmiany wielkości populacji w chwili *t* jest wprost proporcjonalna do wielkości populacji w chwili *t*.

$$y'(t) = r \cdot y(t)$$

$y = y(t)$ – **wielkość populacji w chwili** t

Model Malthusa cd.

$$y'(t) = r \cdot y(t), \qquad y(0) = y_0$$

$y = y(t)$ – wielkość populacji w chwili t

r – współczynnik wzrostu populacji, $r \in R$

$r = r_b - r_d$, $r > 0$ lub $r < 0$

r_b – współczynnik urodzeń

r_d – współczynnik śmiertelności

Model Malthusa cd.

Równanie o zmiennych rozdzielonych:

$$y'(t) = r \cdot y(t)$$

Warunek początkowy:

$$y(0) = y_0$$

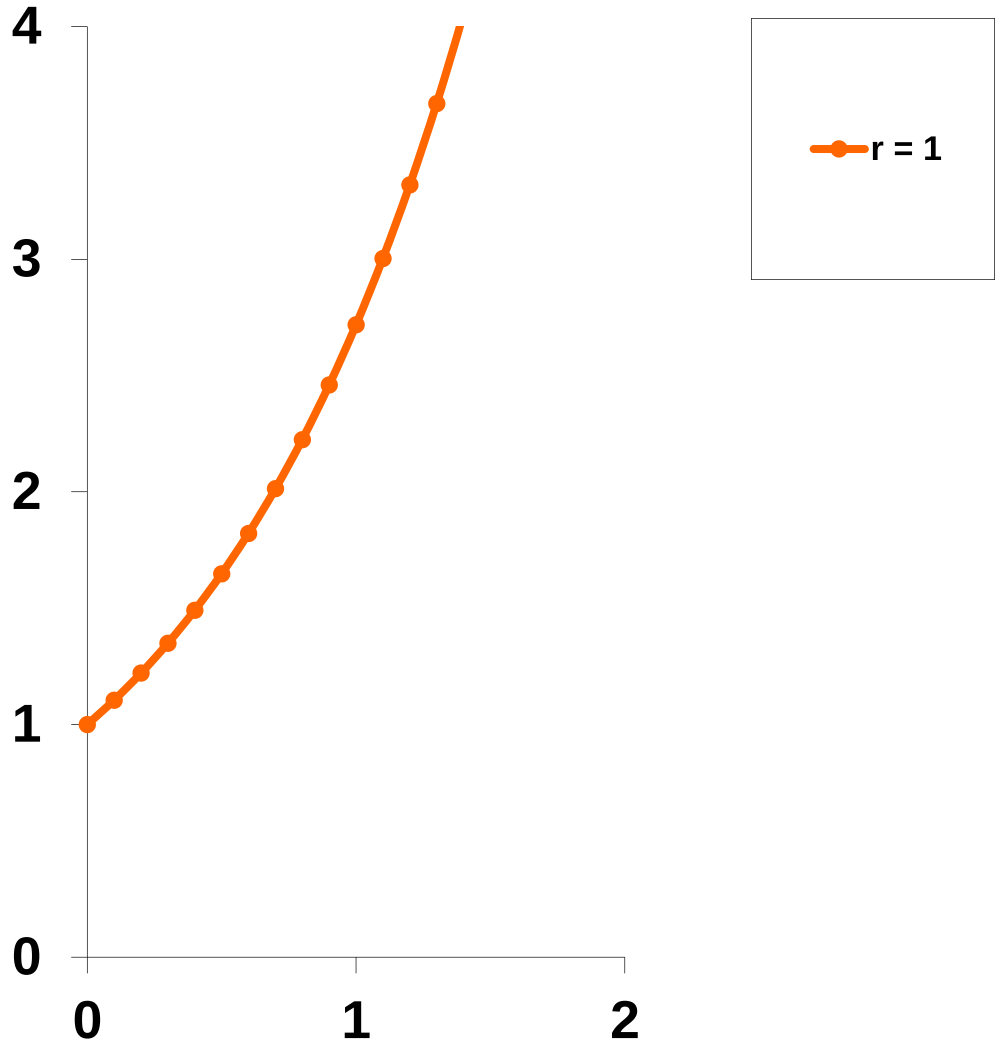
Rozwiązanie:

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

Rozwiązanie dla y_0=1 r = 1

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$\boxed{y(t) = e^{t}}$$

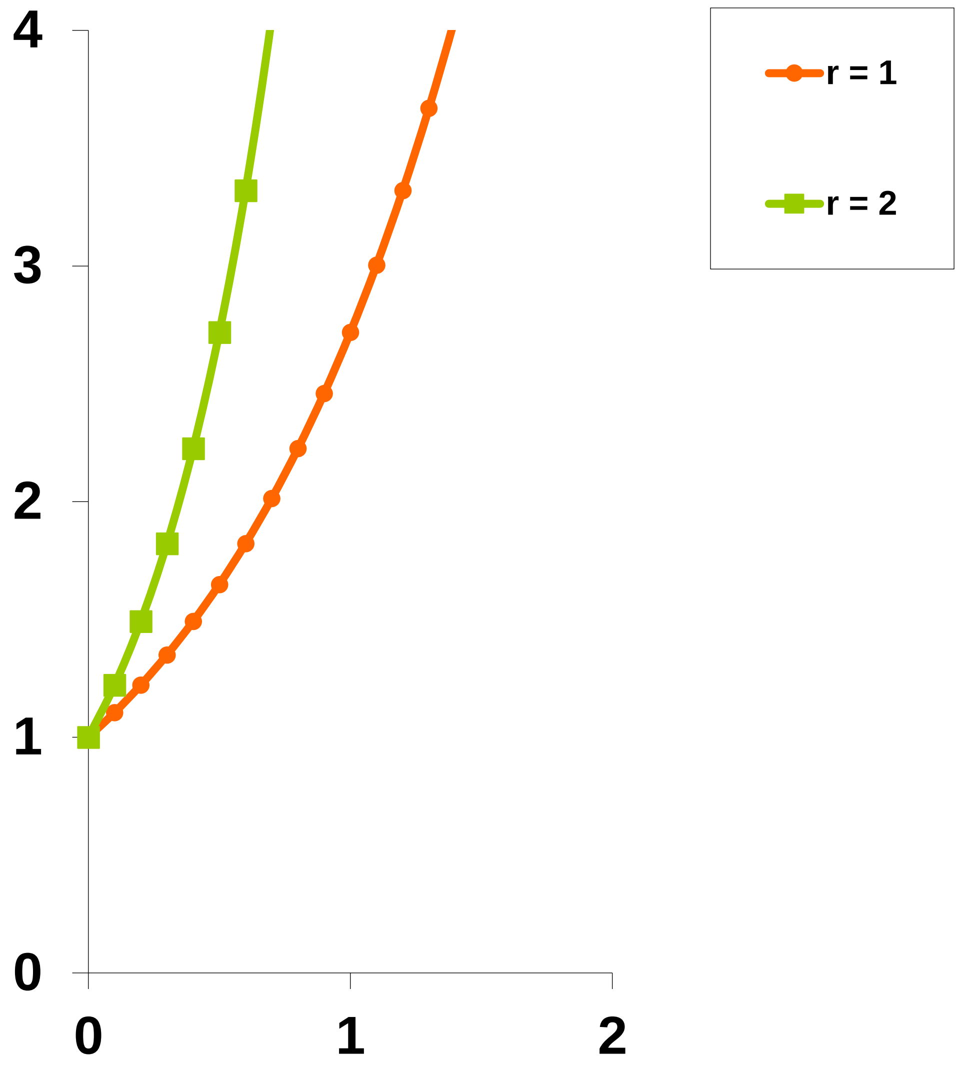


Rozwiązanie dla $y_0 = 1$ $r = 2$

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$y(t) = e^{t}$$

$$y(t) = e^{2\,t}$$



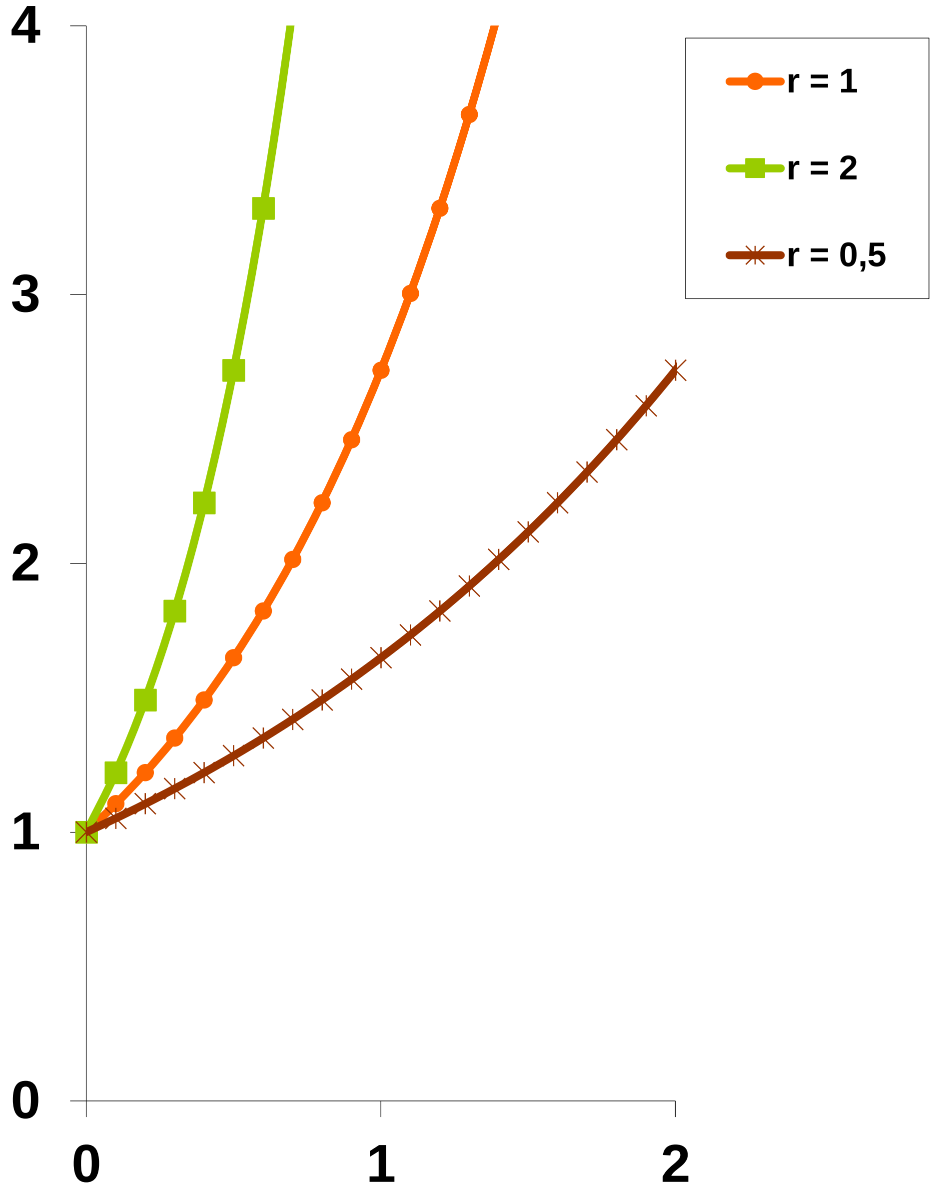
Rozwiązanie dla $y_0=1$ $r = 0,5$

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$y(t) = e^{t}$$

$$y(t) = e^{2\,t}$$

$$y(t) = e^{0,5\,t}$$



Ocena modelu Malthusa

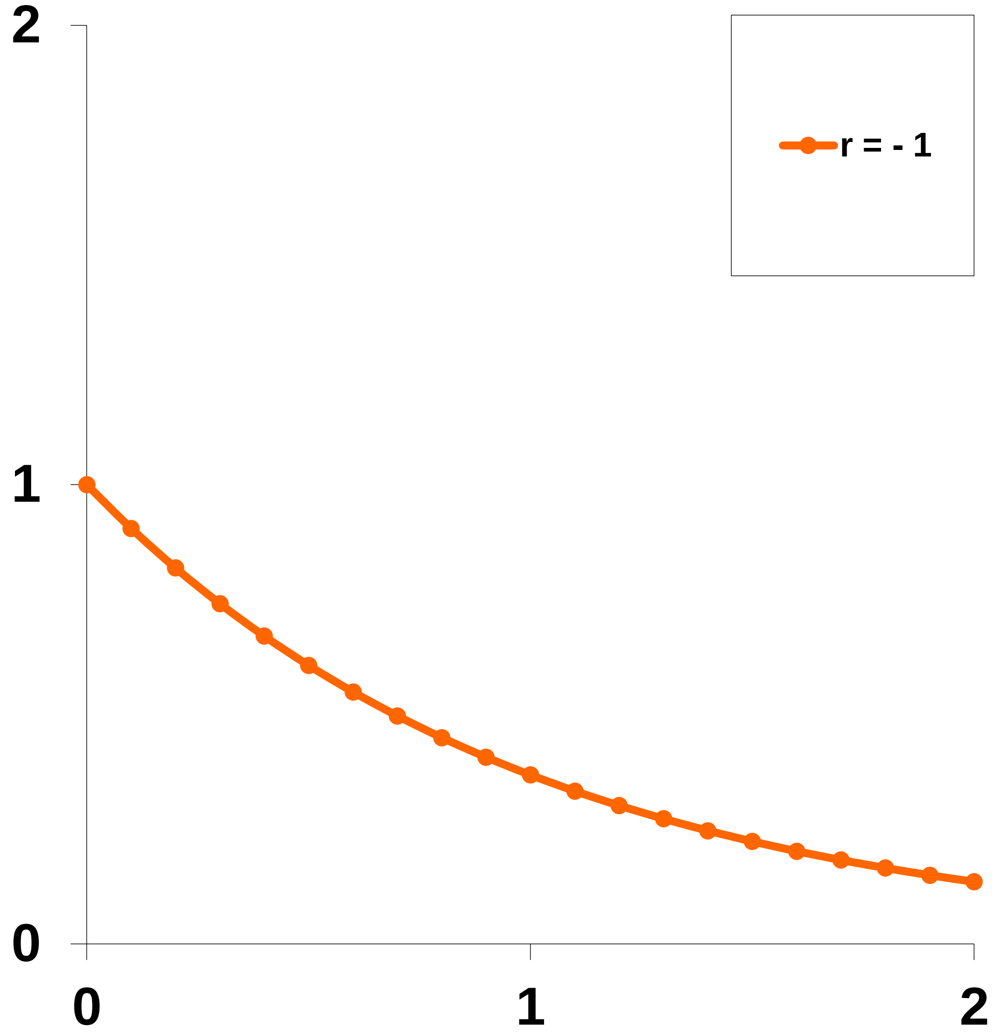
Gdy $r > 0$, $y_0 > 0$, to

$$y(t) = y_0 e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

Rozwiązanie dla y_0=1 r = -1

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$y(t) = e^{-t}$$

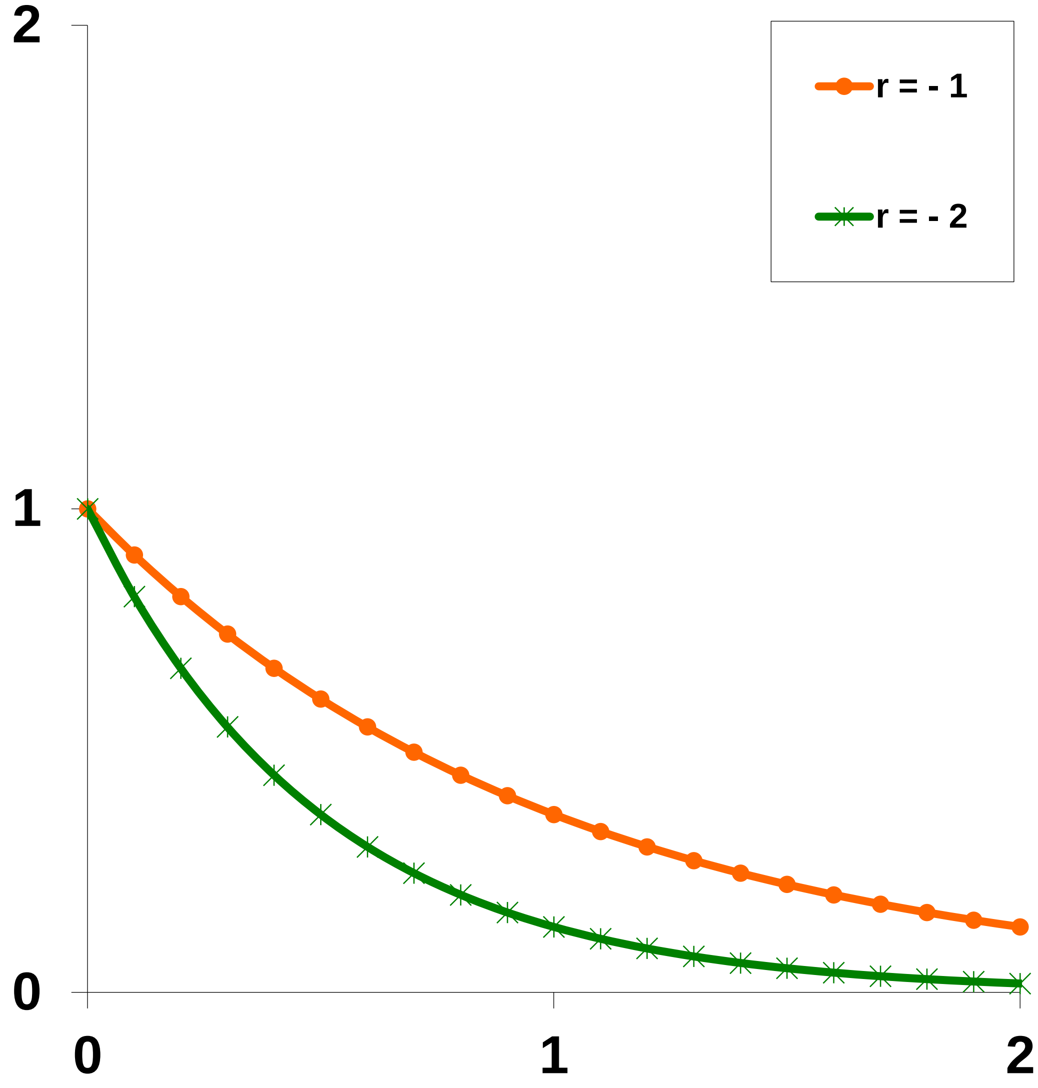


Rozwiązanie dla y_0=1 r = -2

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$y(t) = e^{-t}$$

$$y(t) = e^{-2\,t}$$



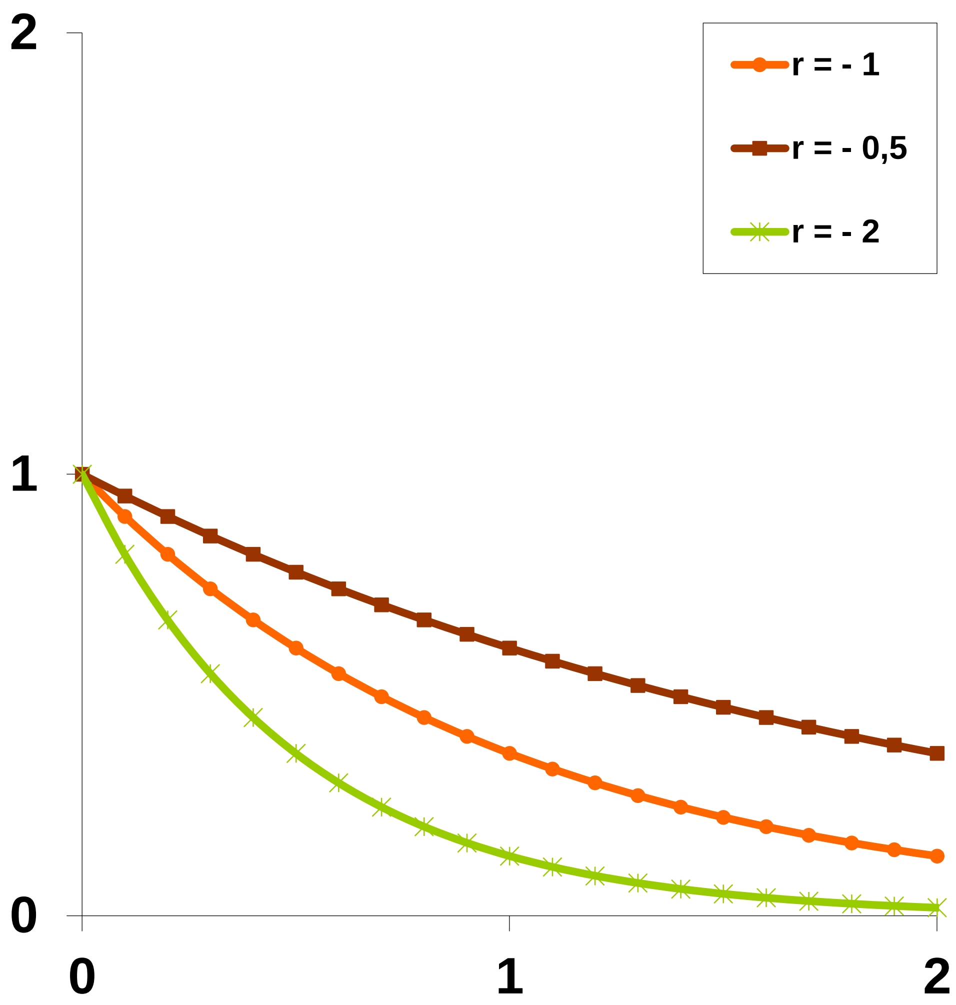
Rozwiązanie dla y_0=1 r = -0,5

$$y(t) = y_0\, e^{r\,t}$$

$$y(t) = e^{-t}$$

$$y(t) = e^{-2\,t}$$

$$y(t) = e^{-0,5\,t}$$



Ocena modelu Malthusa

Gdy $r < 0$, $y_0 > 0$, to

$$y(t) = y_0 e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Ocena modelu Malthusa

$$y(t) = y_0 e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{gdy } r > 0 \\ 0 & \text{gdy } r < 0 \\ y_0 & \text{gdy } r = 0 \end{cases}$$

Uwagi do modelu Malthusa

$$y'(t) = \cancel{r} \cdot y(t)$$

$$g(y)$$

Uwaga 1

Funkcja *g*(*y*) powinna uwzględniać konkurencję wewnątrzgatunkową

Uwaga 2

Należy uwzględnić pojemność środowiska

Propozycja Verhulsta

$$g(y) = r \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

g **(*y*) – współczynnik wzrostu zależny od liczebności populacji**

r **,** ***k*** **– stałe dodatnie**

Przebieg zmienności funkcji $g(y)$

$$g(y) = r \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

$$g(y) = r - \frac{r}{k} y$$

$g(y)$ jest liniową funkcją zmiennej y, zatem wykresem tej funkcji jest prosta.

Przebieg zmienności funkcji $g(y)$

$$g(y) = r \cdot \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

DZIEDZINA: $y > 0$

PUNKTY WSPÓLNE Z OSIAMI:

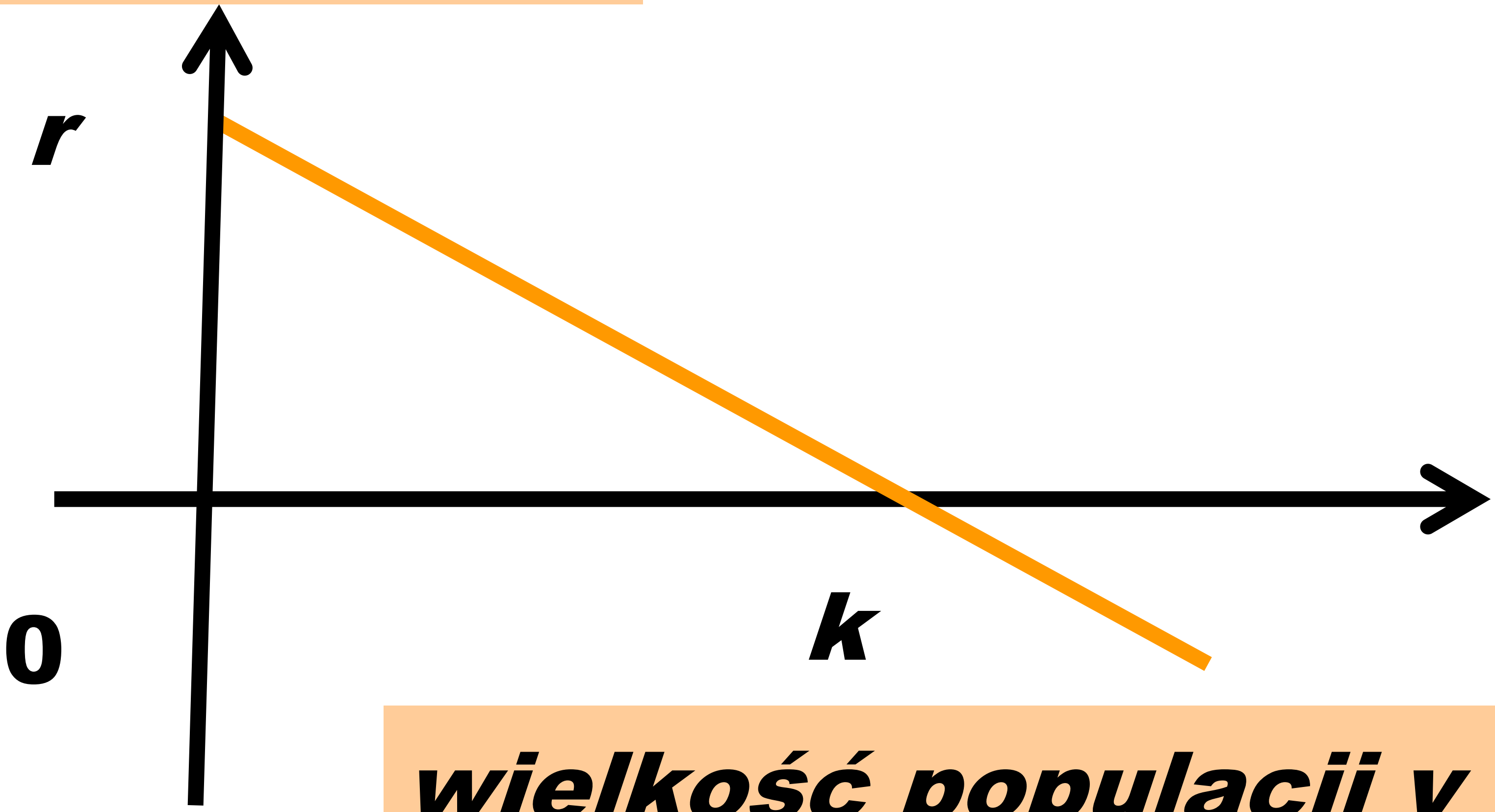
A(0, r), B(k, 0)

GRANICE: $\lim_{y \to 0^+} g(y) = r, \quad \lim_{y \to +\infty} g(y) = -\infty$

MONOTONICZ.: $g\downarrow$ *w dziedzinie*

Przebieg zm. funkcji $g(y) = r - \frac{r}{k} y$

współcz. wzrostu g(y)



wielkość populacji y

Model Verhulsta

$$y'(t) = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y, \quad y(0) = y_0$$

Równanie logistyczne

Model Verhulsta

$$y'(t) = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y, \quad y(0) = y_0$$

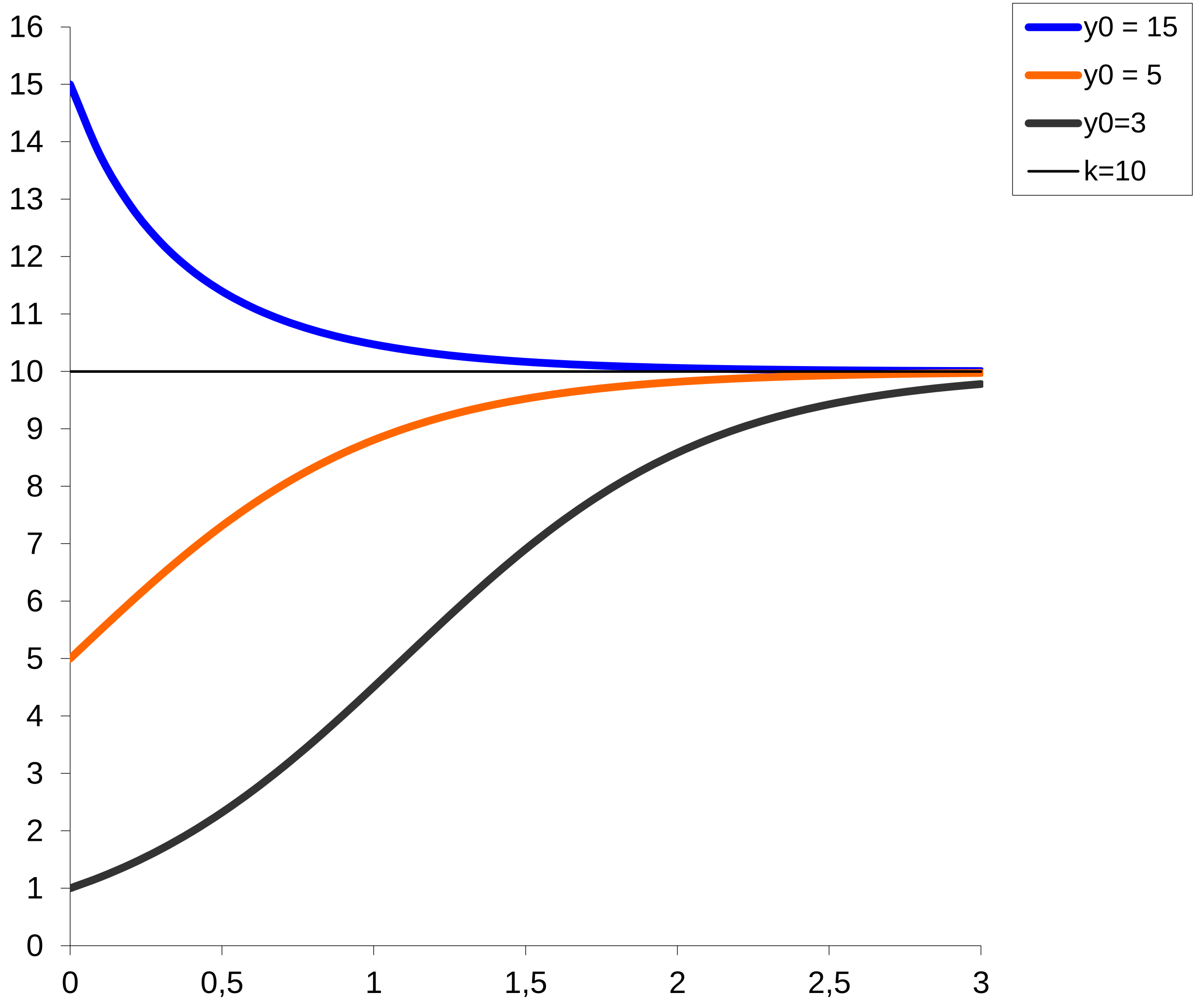
Równanie logistyczne

Rozwiązanie szczególne:

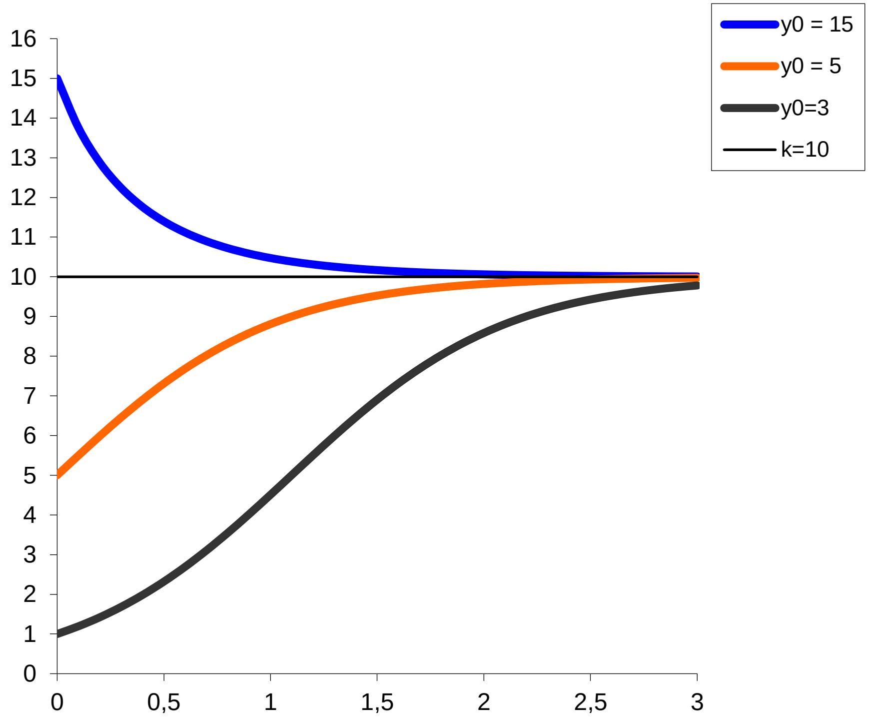
$$y(t) = \frac{k y_0 e^{rt}}{y_0 e^{rt} + (k - y_0)} = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

Wykresem jest krzywa logistyczna.

Krzywa logistyczna



Krzywa logistyczna - własności

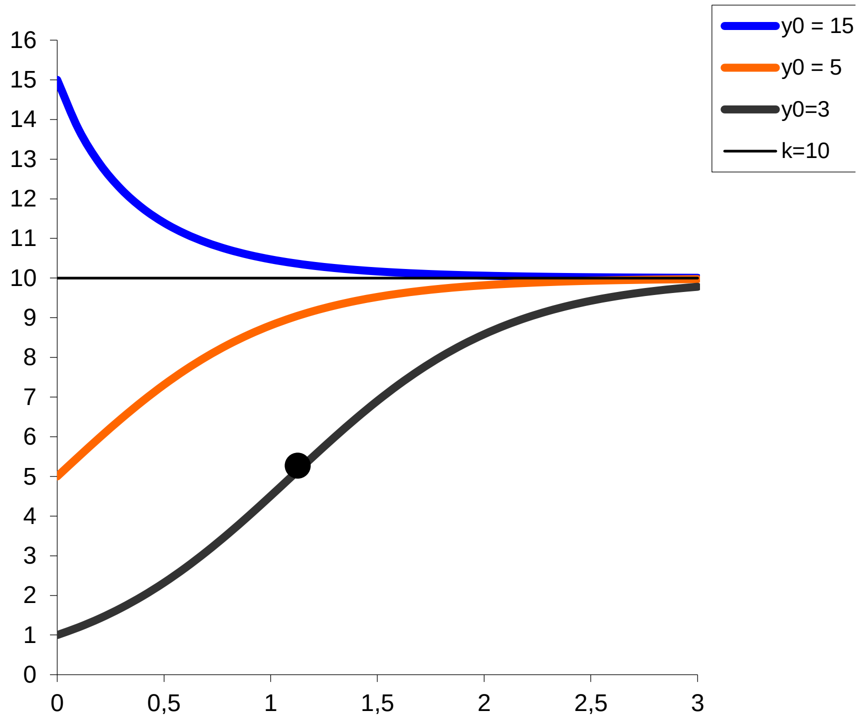


Wzór opisuje rodzinę rozwiązań startujących od wartości początkowej $y_0>0$.

Dla $y_0>k$ rozwiązanie maleje do k, a dla $y_0<k$ rośnie do k.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = k$$

Krzywa logistyczna - własności



Dla $y_0 \in \left(0\,;\tfrac{1}{2}k\right)$ rozwiązanie posiada punkt przegięcia (najszybszego wzrostu).

$$y''\left(t_p\right)=0, \quad y\left(t_p\right)=\tfrac{1}{2}k$$

Wówczas przedziale $\left(0\,;t_p\right)$ funkcja jest wypukła,

a w przedziale $\left(t_p\,;\infty\right)$ wklęsła.

Modelowanie wzrostu

JOURNAL OF ANIMAL SCIENCE
The Premier Journal and Leading Source of New Knowledge and Perspective in Animal Science

Modeling the growth of the Goettingen minipig

F. Köhn, A. R. Sharifi and H. Simianer

J Anim Sci 2007. 85:84-92.
doi: 10.2527/jas.2006-271

Modelowanie wzrostu

Modeling minipig growth 87

Table 2. Functions considered in this study for modeling the growth curve of the minipig

Model	Equation[1]	No. of parameters	Reference
Logistic	$W = \frac{a}{(1 + b \times e^{(-c \times t)})}$	3	(Fekedulegn et al., 1999)
Gompertz	$W = a \times e^{-e^{(b-(c \times t))}}$	3	(Wellock et al., 2004)
von Bertalanffy	$W = \left[\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b - W_0^{\frac{1}{3}}}\right) \times e^{-\frac{1}{3} \times b \times t}\right]^3$	3	(von Bertalanffy, 1957b)
Brody	$W = a \times \left(1 - b \times e^{(-c \times t)}\right)$	3	(Fitzhugh, 1976)
Richards	$W = \frac{a}{\left(1 + b \times e^{(-c \times t)}\right)^{\frac{1}{m}}}$	4	(Fekedulegn et al., 1999)
Bridges	$W = W_0 + a \times \left(1 - e^{(-m \times t^p)}\right)$	4	(Wellock et al., 2004)
Janoschek	$W = a - (a - W_0) \times e^{(-c \times t^m)}$	4	(Wellock et al., 2004)
Ali-Schaeffer	$W = d_0 + d_1\left(\frac{t}{700}\right) + d_2\left(\frac{t}{700}\right)^2 + d_3\left(\ln\frac{700}{t}\right) + d_4\left(\ln\frac{700}{t}\right)^2$	5	(Ali and Schaeffer, 1987)
Polynomials	$W = d_0 + \sum_{i=1}^{r} d_i \times t^i$	3 to 5	(Hadeler, 1974)

[1]W = BW; W_0 = initial BW in kg; a = mature BW in kg; t = age in days; b, c, m, and p = parameters specific for the function; r = second to fourth order of fit; d_0 = intercept; d_i = regression coefficients.

Modelowanie wzrostu

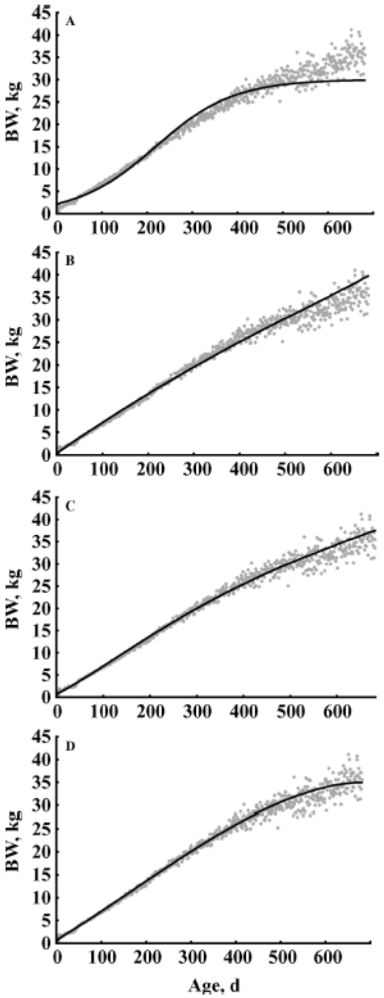


Figure 2. Growth curves of the Goettingen minipig for males in unit 1 as predicted by the logistic (A), Brody (B), Richards (C), and third order polynomial (D) functions.

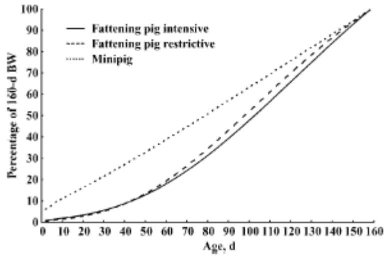


Figure 3. Relative BW development of male minipigs of unit 1 and normal, fattening pigs from birth weight to 160-d BW.

have used pigs (Whittemore, 1986; Krieter and Kalm, 1989; Bastianelli and Sauvant, 1997; Knap et al., 2003; Schinckel et al., 2003; Wellock et al., 2004), cattle (Brown et al., 1976; Lopez de Torre et al., 1992; Menchaca et al., 1996), and poultry (Knizetova et al., 1991b; Sengül and Kiraz, 2005). In the last few years it has become more and more popular to analyze the growth of special livestock, e.g., the Bolivian llama (Wurzinger et al., 2005) and the pearl gray guinea fowl (Nahashon et al., 2006), for providing improvement for their husbandry. Because of the increasing importance of the Goettingen minipig for medical research it is necessary to analyze the BW development of this breed for the well-founded derivation of required space for guidelines of laboratory animals and adjusted feeding regimens. The knowledge of growth pattern in minipigs also facilitates the creation of experimental designs.

The growth of the Goettingen minipig is not the same as the growth of pig breeds for meat production. Apart from the different mature BW the BW development of the minipig should be slower than the BW development of normal pigs, mainly in the first year so that the mature BW of the Goettingen minipig will be achieved later than the mature BW of normal pigs. On the basis of growth parameters of the Richards function estimated in this study and in the study of Kusec (2001)

Table 5. Mature BW and ages at 40% of mature BW (40% MW) of normal, fattening pigs and minipigs (males of unit 1) calculated with parameters of the Richards function

	Fattening pigs[1]		
Item	Intensively fed	Restrictively fed	Minipigs
Mature BW, kg	220[1]	160[1]	53
40% MW, kg	88	64	21
Age at 40% MW, d	129	109	310

[1]Kusec (2001).