

Temat wykładu:

Równania różniczkowe

Zagadnienia

1. Terminologia i oznaczenia
2. Przykłady

Definicja

Nieznana funkcja:

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

W **równaniu różniczkowym** występuje **nieznana funkcja** f oraz jej **nieznana pochodna** f' (lub pochodne wyższych rzędów f'' , f''' , itd.). Może też wystąpić argument x .

Przykład 1

Równanie różniczkowe:

$$f'(x) = 2[f(x)]^2$$

f, f' – nieznane

Przykład 1

Równanie różniczkowe:

$$f'(x) = 2[f(x)]^2$$

f, f' – nieznanne

To równanie spełnia funkcja:

$$f(x) = \frac{-1}{2x}$$

Przykład 1

Równanie różniczkowe

$$f'(x) = 2[f(x)]^2$$

Spełnia funkcja:

$$f(x) = \frac{-1}{2x}$$

Sprawdzenie:

$$L = f'(x) = \left(\frac{-1}{2x}\right)' = \dots = \frac{1}{2x^2}$$

$$P = 2[f(x)]^2 = 2\left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = \dots = \frac{1}{2x^2}$$

Przykład 1

Równanie różniczkowe:

$$f'(x) = 2[f(x)]^2$$

f, f' – nieznanne

Spełnia każda funkcja postaci:

$$f(x) = \frac{-1}{2x + c}$$

c – liczba rzeczywista

Zatem jest nieskończenie wiele funkcji spełniających to równanie różniczkowe.

Zapis

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

$$f'(x) = 2[f(x)]^2$$

Inny zapis funkcji: $y = y(x)$

i zapis równania różniczkowego:

$$y'(x) = 2[y(x)]^2$$

Zapis bez argumentu x :

$$y' = 2y^2$$

Przykład 2

Równanie różniczkowe:

$$y' = xy$$

$y=y(x)$ – nieznana funkcja

$y'=y'(x)$ – nieznana pochodna

x – argument funkcji

Przykład 3

Równanie różniczkowe:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = e^x$$

$y=y(x)$ – nieznana funkcja

$y'=y'(x)$ – nieznana pochodna (pierwsza)

$y''=y''(x)$ – nieznana druga pochodna

(pochodna drugiego rzędu)

x – argument funkcji

*Przykład 4

Nieznana funkcja dwóch zmiennych:

$$u = u(x, y)$$

Pochodne cząstkowe:

$$u'_x \quad u'_y$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Terminologia

Równanie różniczkowe **zwyczajne** – szukana funkcja zależy od **jednej** zmiennej niezależnej

$$y = y(x)$$

Równanie różniczkowe **cząstkowe** – szukana funkcja zależy od **wielu** zmiennych niezależnych (liczba zmiennych niezależnych $k > 1$),

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Przykłady

Równania różniczkowe zwyczajne:

szukana funkcja $y = y(x)$

$$(1) \quad y' = 2y^2$$

$$(2) \quad y' = xy$$

$$(3) \quad x^2 y'' + xy' + y = e^x$$

Równanie różniczkowe cząstkowe:

szukana funkcja $u = u(x, y)$

$$(4) \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Terminologia, przykłady

Rząd równania różniczkowego to najwyższy rząd pochodnej, jaka w nim występuje.

Równanie pierwszego rzędu:

$$y' = 2y^2$$

Równanie drugiego rzędu:

$$x^2 y'' + xy' + y = e^x$$

Terminologia, przykłady

Funkcja $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego, gdy spełnia tożsamościowo to równanie dla $x \in (a, b)$

Przykład

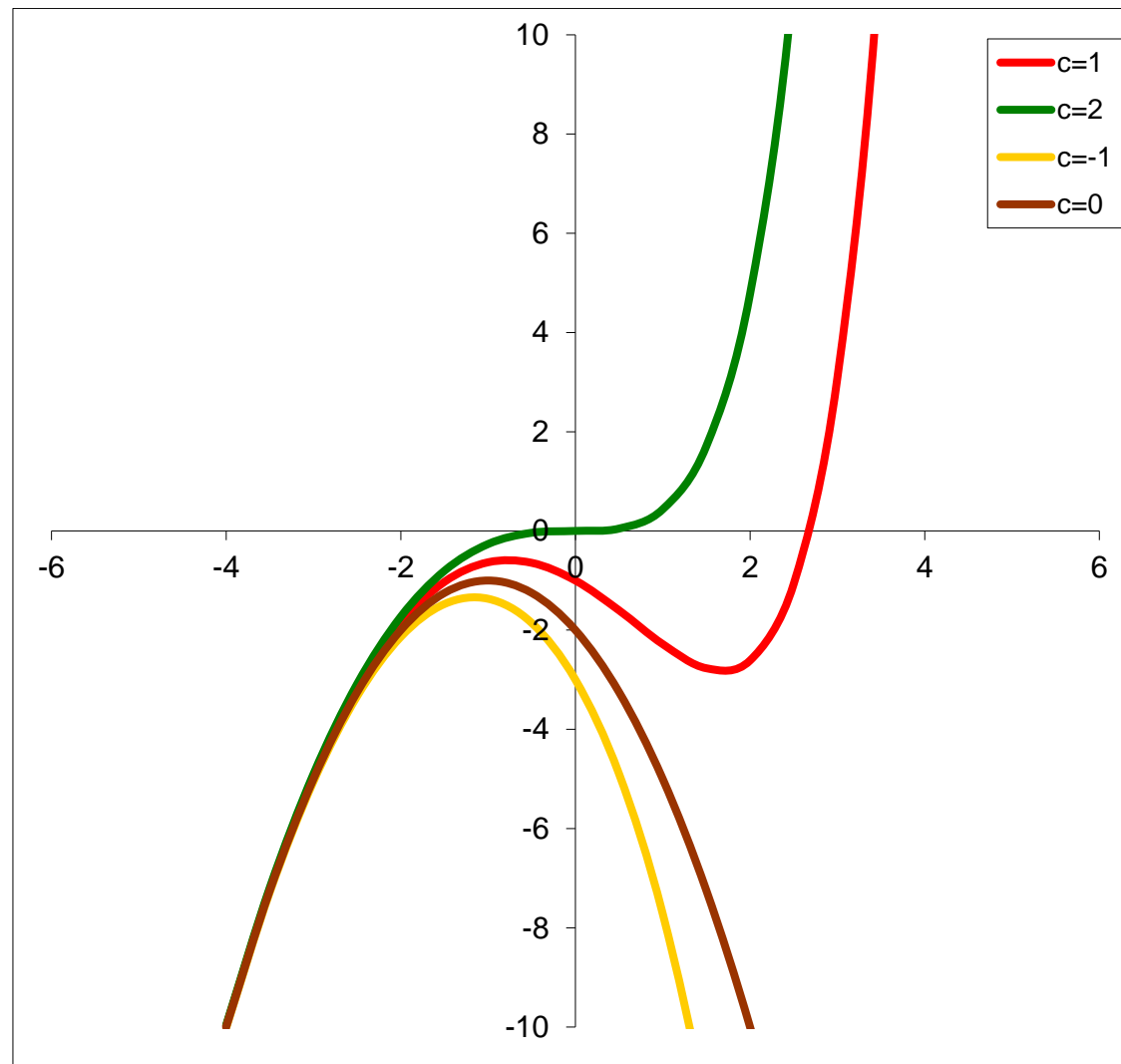
Wykaż, że funkcja

$$y(x) = c \cdot e^x - 2 - 2x - x^2$$

gdzie: c – stała rzeczywista, jest rozwiązaniem równania

$$y' = y + x^2$$

Przykład cd.



Terminologia

Rodzinę funkcji

$$y(x) = c \cdot e^x - 2 - 2x - x^2$$

gdzie: c – stała rzeczywista,

która jest rozwiązaniem równania

$$y' = y + x^2$$

nazywamy **rozwiązaniem ogólnym** tego równania.

Terminologia cd.

Spośród wszystkich funkcji tworzących rozwiązanie ogólne równania różniczkowego, tylko jeden wykres przechodzi przez punkt

$$(0, 1)$$

czyli spełnia warunek $y(0)=1$.

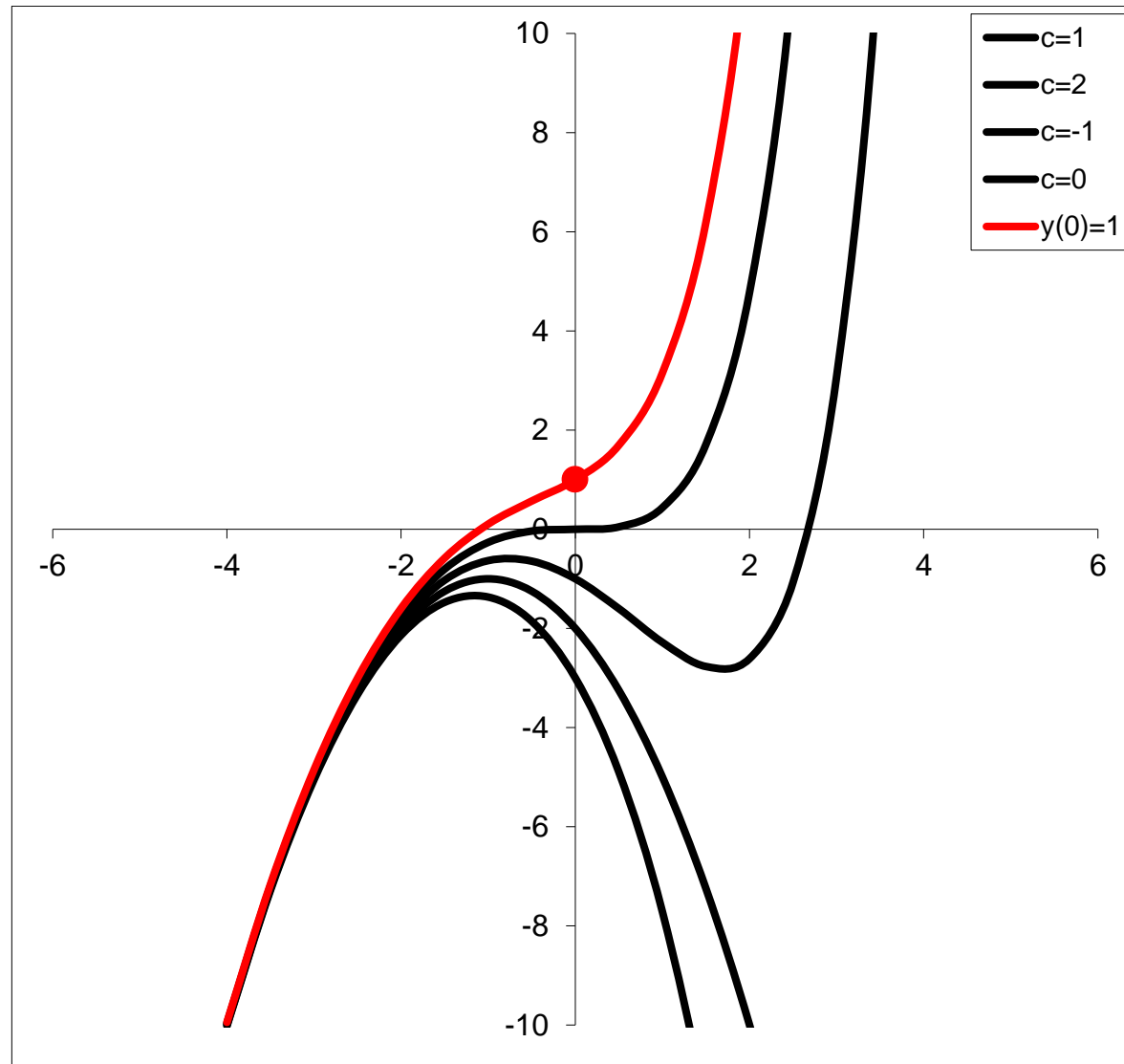
Warunek ten nazywamy warunkiem początkowym, a funkcję $y(x)$ spełniającą ten warunek - rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego.

Przykład cd.

Znajdź rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy

$$y(0) = 1$$

Przykład cd.



Oznaczenia

funkcja $y = y(x)$

pochodna $y'(x)$

ilorazowy zapis pochodnej:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(czyt.: dy po dx)

R-nie o zmiennych rozdzielonych

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Przykłady

Przykład

a) Wyznacz rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

$$y \cdot y' = 0,5$$

b) Wyznacz rozwiązanie szczególne spełniające warunek

$$y(0)=2$$

Odpowiedzi

a)

$$y = \pm \sqrt{x + c}$$

c – stała rzeczywista

b)

$$y = \sqrt{x + 4}$$