

Temat wykładu:

Pochodna funkcji. Zastosowania pochodnej. Badanie przebiegu zmienności

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie

pomarańczowy – uwaga

kursywa – komentarz

***** – materiał nadobowiązkowy

Zagadnienia

- 1. Pochodna**
- 2. Zastosowanie pochodnej do badania monotoniczności funkcji**
- 3. Wykrywanie ekstremów lokalnych**
- 4. Granica funkcji – reguła de L'Hospitala**
- 5. Badanie przebiegu zmienności funkcji**

*

Pochodna funkcji - idea

* Pochodna funkcji - idea

Niech

$$\mathbf{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

Rozpatrujemy:

ciąg argumentów

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$$

ciąg wartości

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

ciąg ilorazów różnicowych

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0}$$

granice tego ciągu ...

* Pochodna funkcji – definicja

Niech $f : D \rightarrow R$, $x_0 \in D$, (x_n) – taki ciąg, że $x_n \in D$ dla każdego $n \in N^+$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Jeżeli istnieje skończona granica ciągu

ilorazów różnicowych $\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

niezależna od wyboru ciągu (x_n) , to

nazywamy ją **pochodną funkcji f w punkcie x_0** i piszemy

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Uwaga 1

Z tej definicji oraz twierdzeń opisujących własności pochodnej wyprowadza się wzory na pochodne funkcji elementarnych podane dalej.

Uwaga 2

Pochodna funkcji jest również pewną funkcją. Niżej podano przykłady zapisu pochodnej.

wzór funkcji

wzór pochodnej

$$\mathbf{f(x) = x^2 + 1}$$

$$\mathbf{f'(x) = 2x}$$

$$\mathbf{g(x) = e^x}$$

$$\mathbf{g'(x) = e^x}$$

$$\mathbf{h(x) = 5}$$

$$\mathbf{h'(x) = 0}$$

Pochodna funkcji - terminologia

Obliczanie pochodnej funkcji f nazywa się różniczkowaniem funkcji f .

Wzory na pochodne funkcji

Funkcja stała:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

Pochodna funkcji stałej:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Konwencja zapisu:

Pochodna funkcji stałej

$$(\mathbf{c})' = \mathbf{0}$$

(1)

Wzory na pochodne funkcji cd.

Pochodna funkcji potęgowej

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (2)$$

α - stała, $\alpha \in \mathbf{R}$

Pochodna funkcji wykładniczej

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \quad (3)$$

a - stała, $a > 0$

Pochodna funkcji logarytmicznej

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (4)$$

a - stała, $a > 0$, $a \neq 1$

Reguły różniczkowania

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x), \quad a - \text{stała}, \quad a \in \mathbf{R} \quad (5)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \quad (6)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (7)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (8)$$

$$\{g[f(x)]\}' = g'[f(x)] \cdot f'(x) \quad (9)$$

Terminologia – uwaga

$$f : (a ; b) \rightarrow R$$

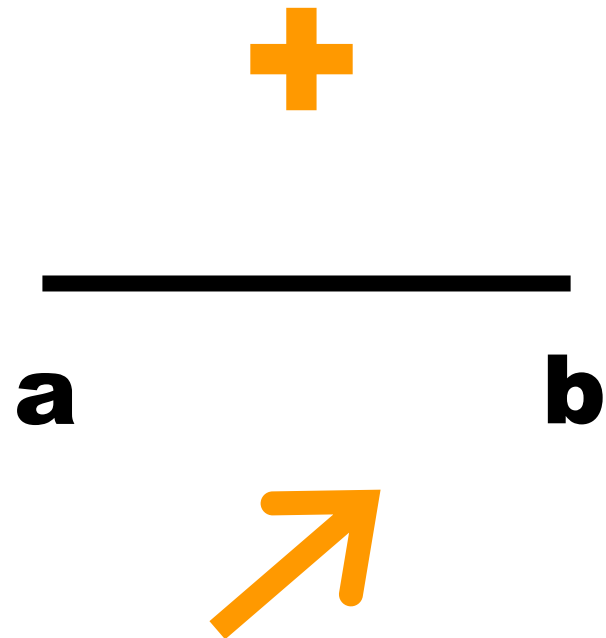
Dziedzina $D_f = (a ; b)$, zbiór wartości $Y_w \subset R$

Mówimy: funkcja f określona na przedziale $(a ; b)$ o wartościach rzeczywistych

Jeżeli $f : (a ; b) \rightarrow R$ i w każdym punkcie $x \in (a ; b)$ istnieje pochodna funkcji $f'(x)$, to mówimy: funkcja f jest różniczkowalna (gładka) na przedziale $(a ; b)$.

Badanie monotoniczności

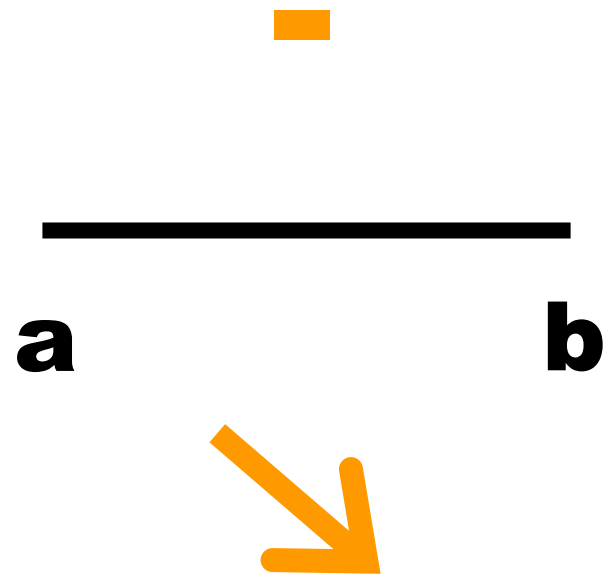
Diagram 1



**znak
pochodnej f'**

**monotoniczność
funkcji f**

Diagram 2



**znak
pochodnej f'**

**monotoniczność
funkcji f**

Diagram 3

0



funkcja stała

**znak
pochodnej f'**

**monotoniczność
funkcji f**

Twierdzenie

**Dana jest funkcja $f: (a; b) \rightarrow R$
różniczkowalna na przedziale $(a; b)$.**

Jeśli

$$\forall x \in (a; b) \quad f'(x) > 0, \quad \text{to } f \uparrow \text{ na } (a; b)$$

Jeśli

$$\forall x \in (a; b) \quad f'(x) < 0, \quad \text{to } f \downarrow \text{ na } (a; b)$$

Jeśli

$$\forall x \in (a; b) \quad f'(x) = 0, \quad \text{to } f \text{ stała na } (a; b)$$

Przykład

Zadanie. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Przykład

Zadanie. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Odpowiedzi

$$D=R$$

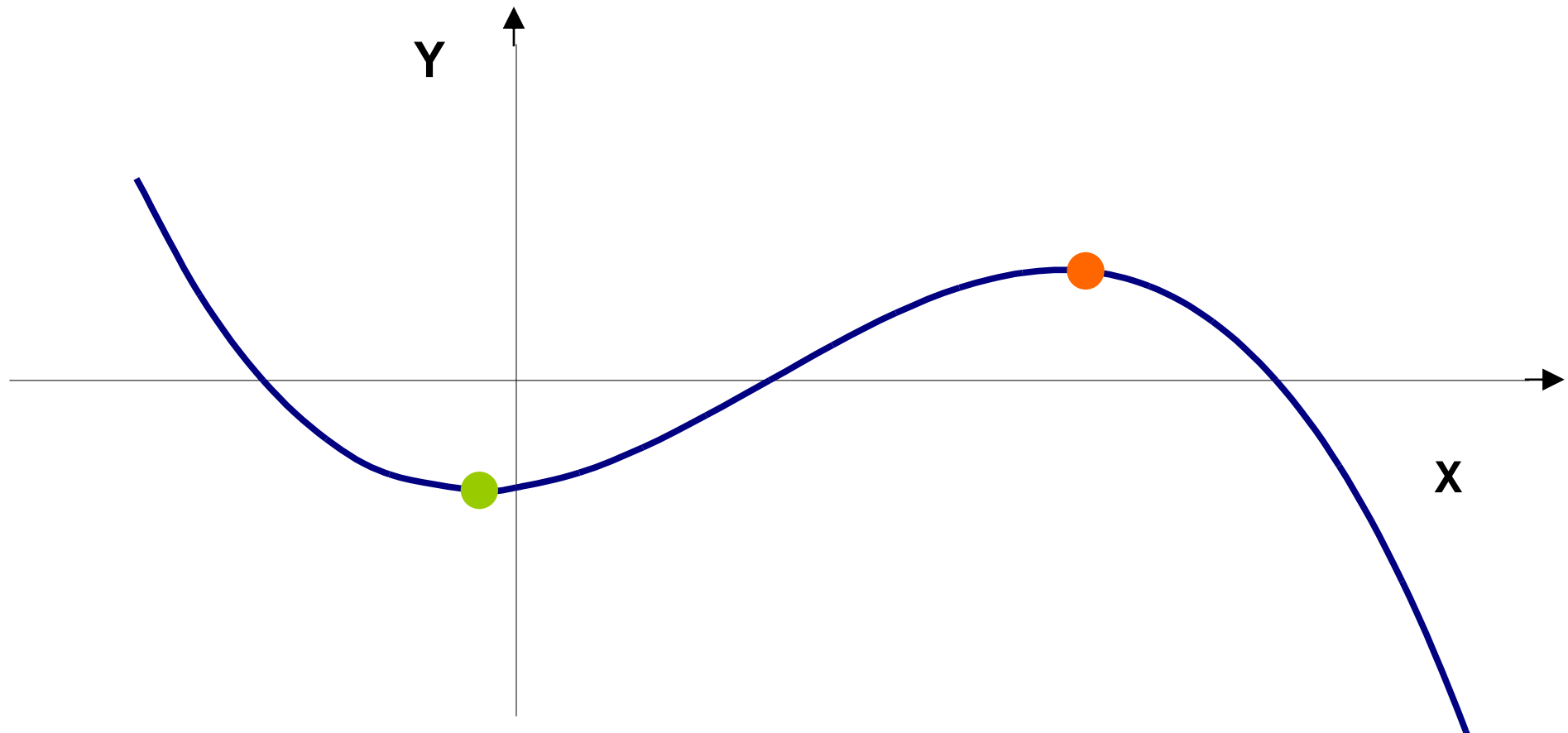
$$f(x) \uparrow \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty; 1)$$

$$f(x) \downarrow \quad \text{dla} \quad x \in (1; +\infty)$$

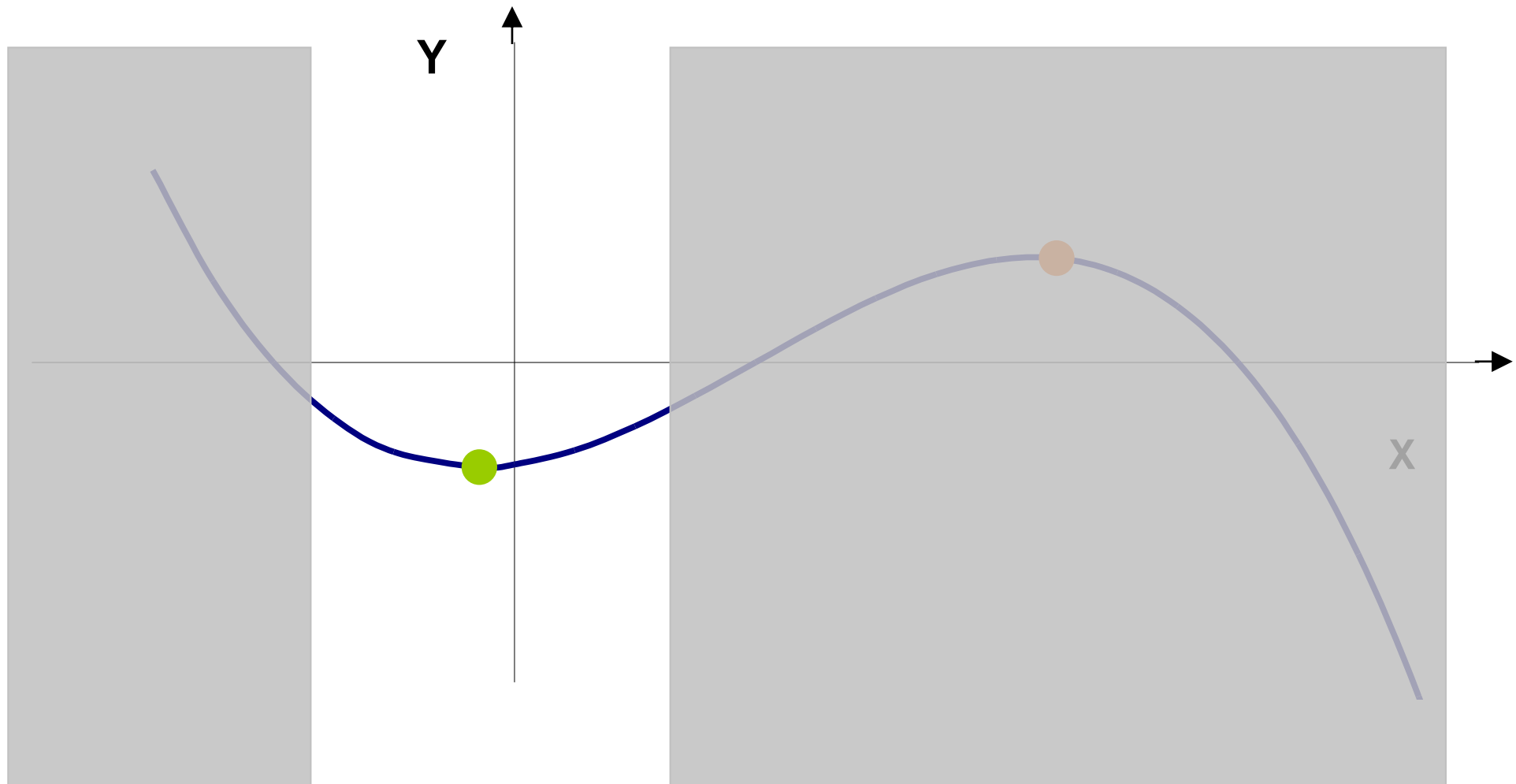
Ekstrema lokalne

Ekstrema lokalne - idea

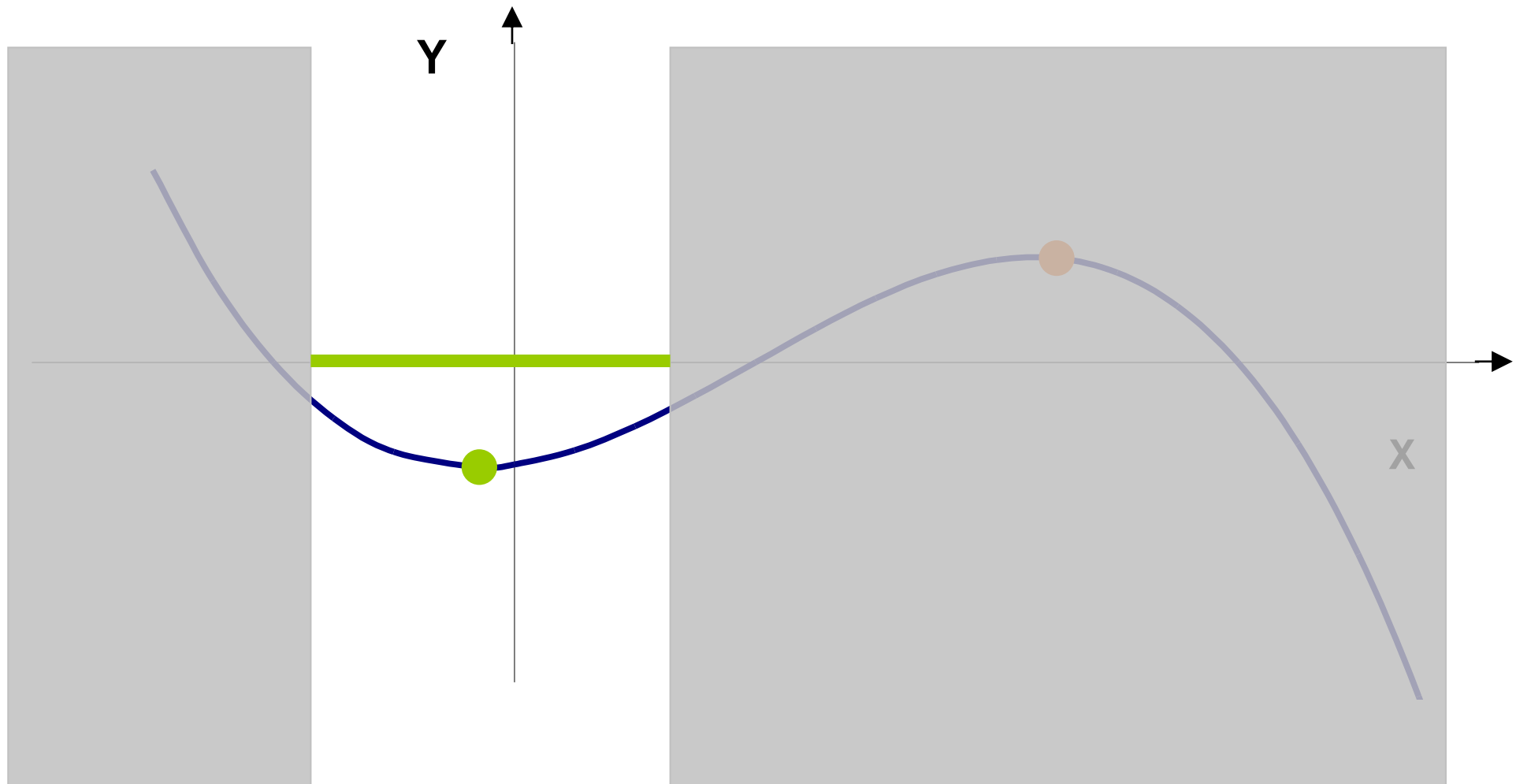
Ekstrema lokalne: **minimum**, **maksimum**



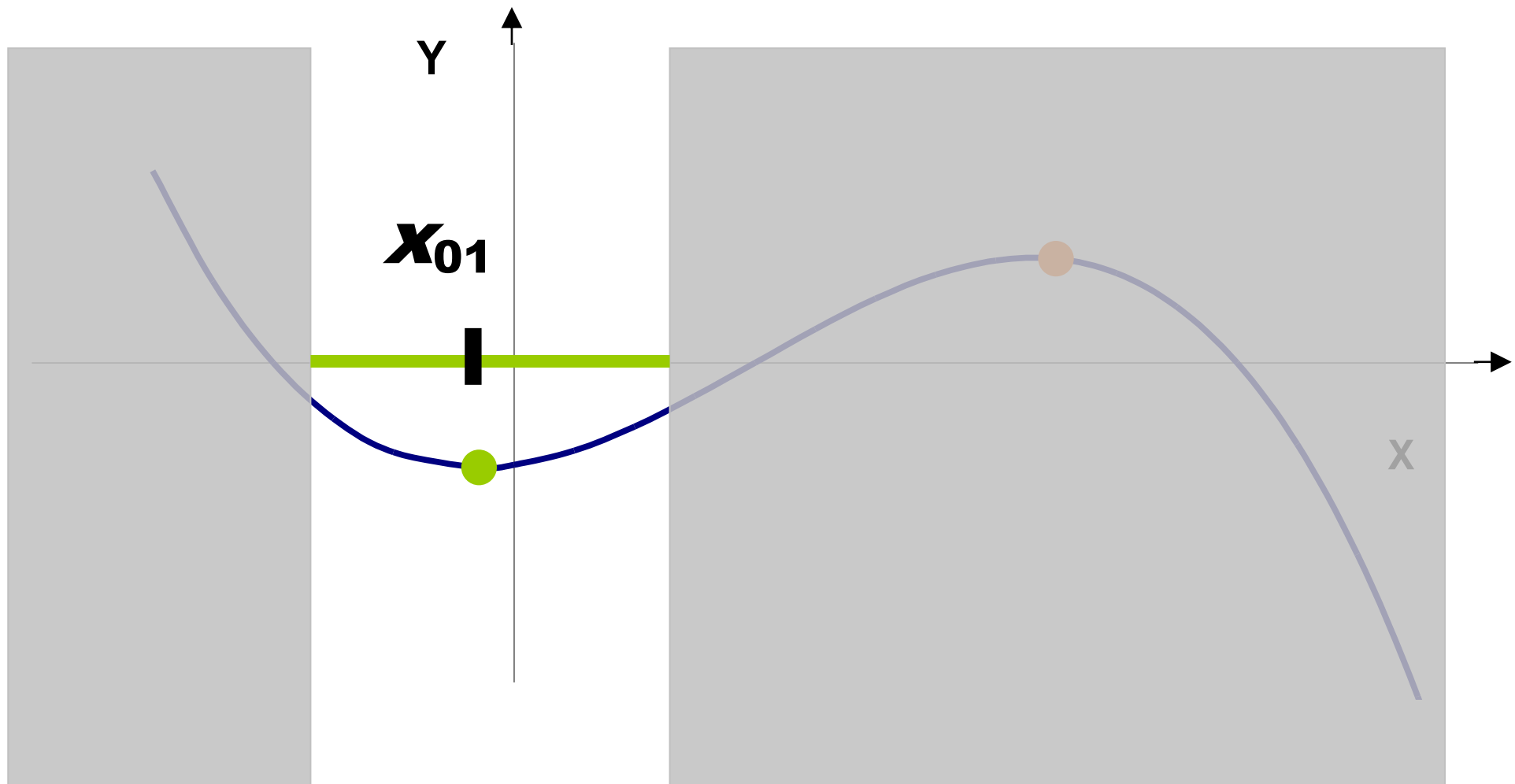
Minimum lokalne



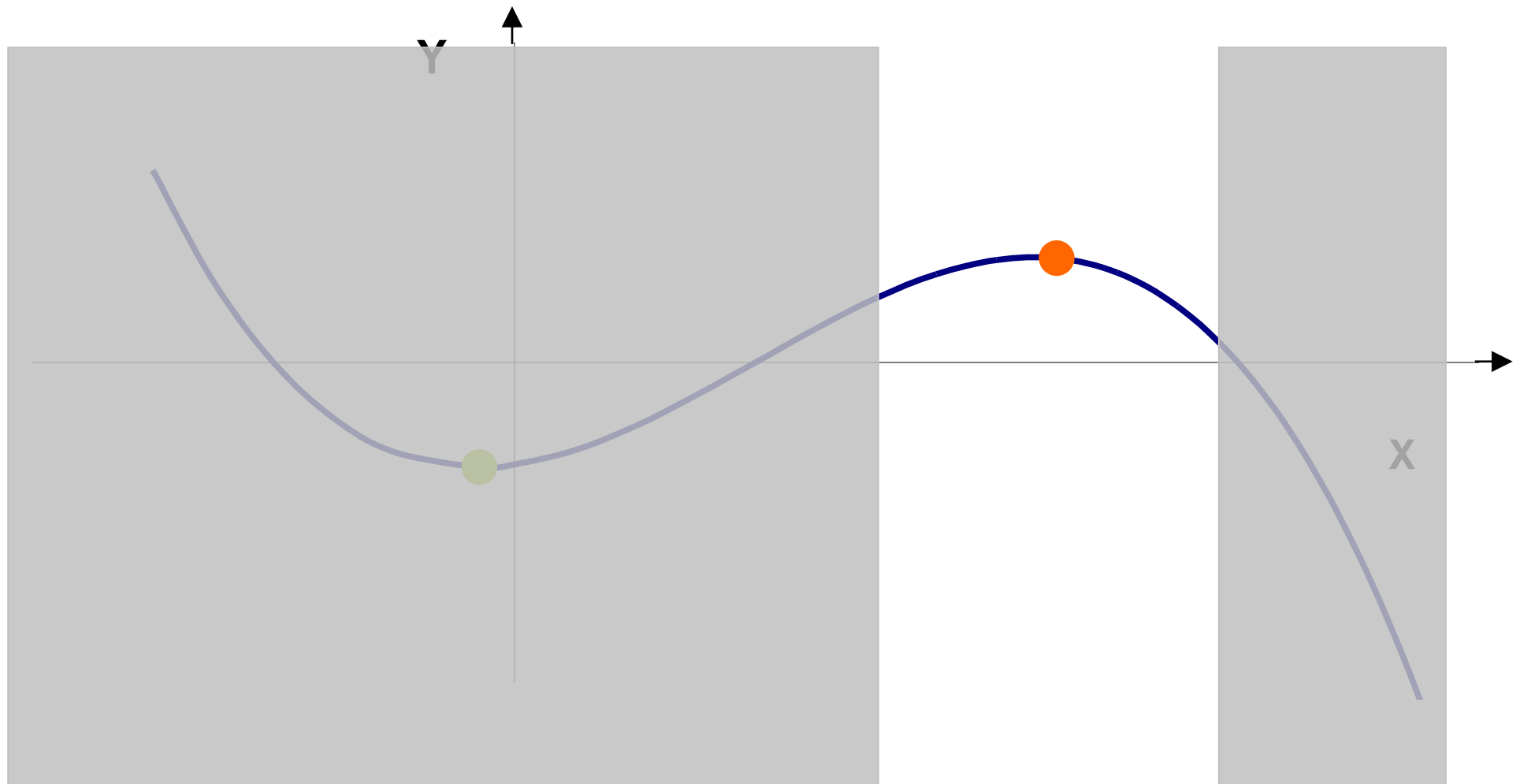
Minimum lokalne cd.



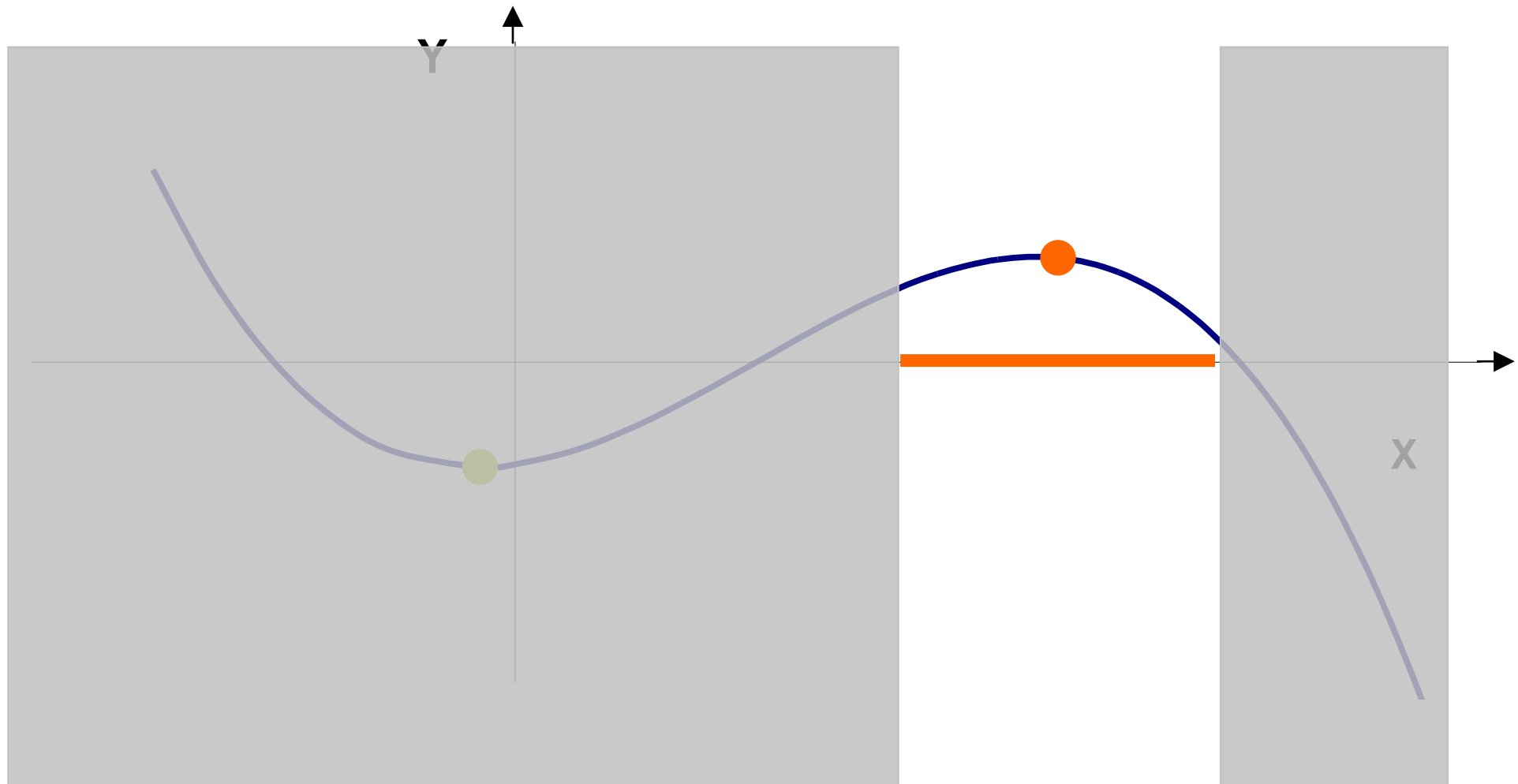
Minimum lokalne cd.



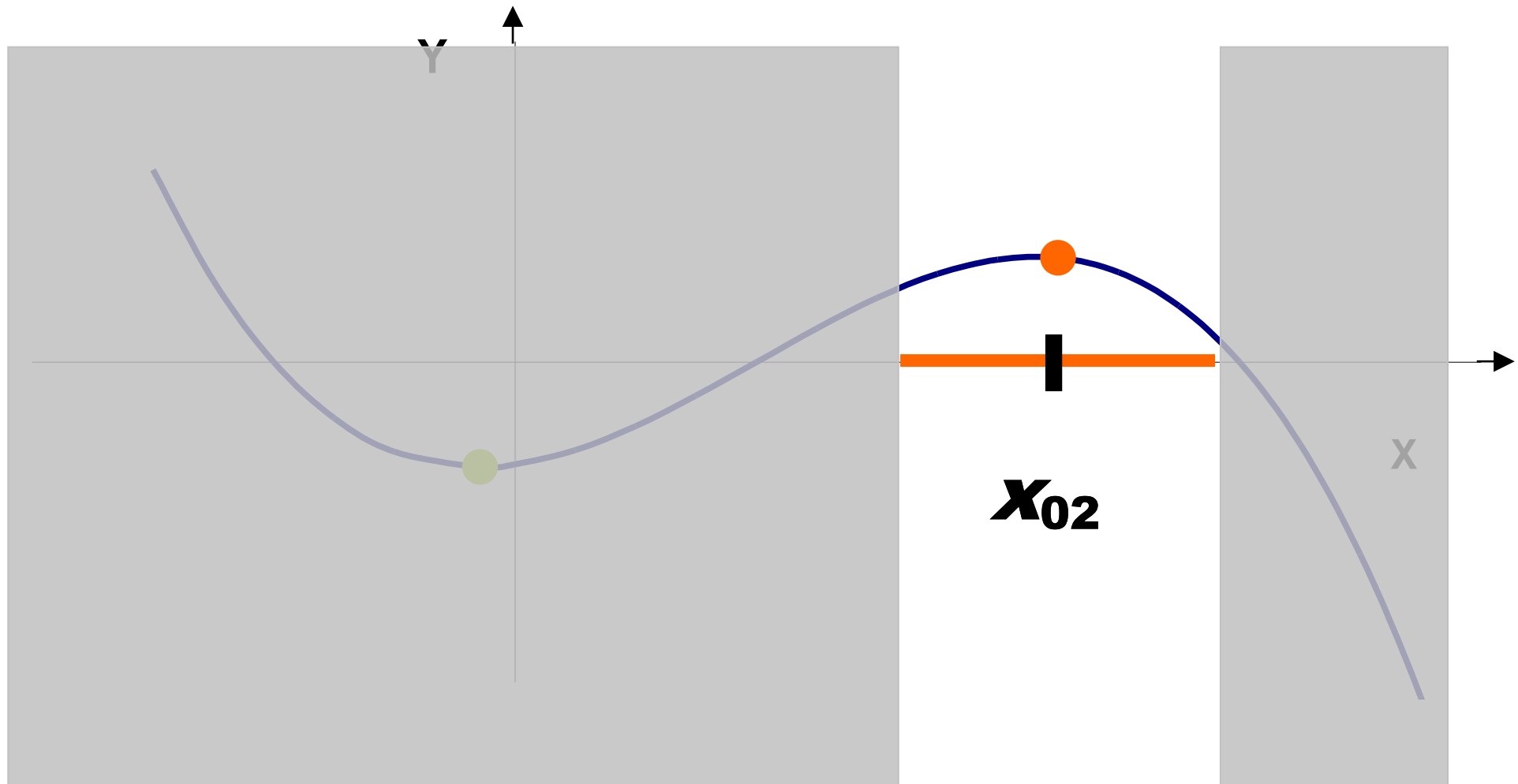
Maksimum lokalne



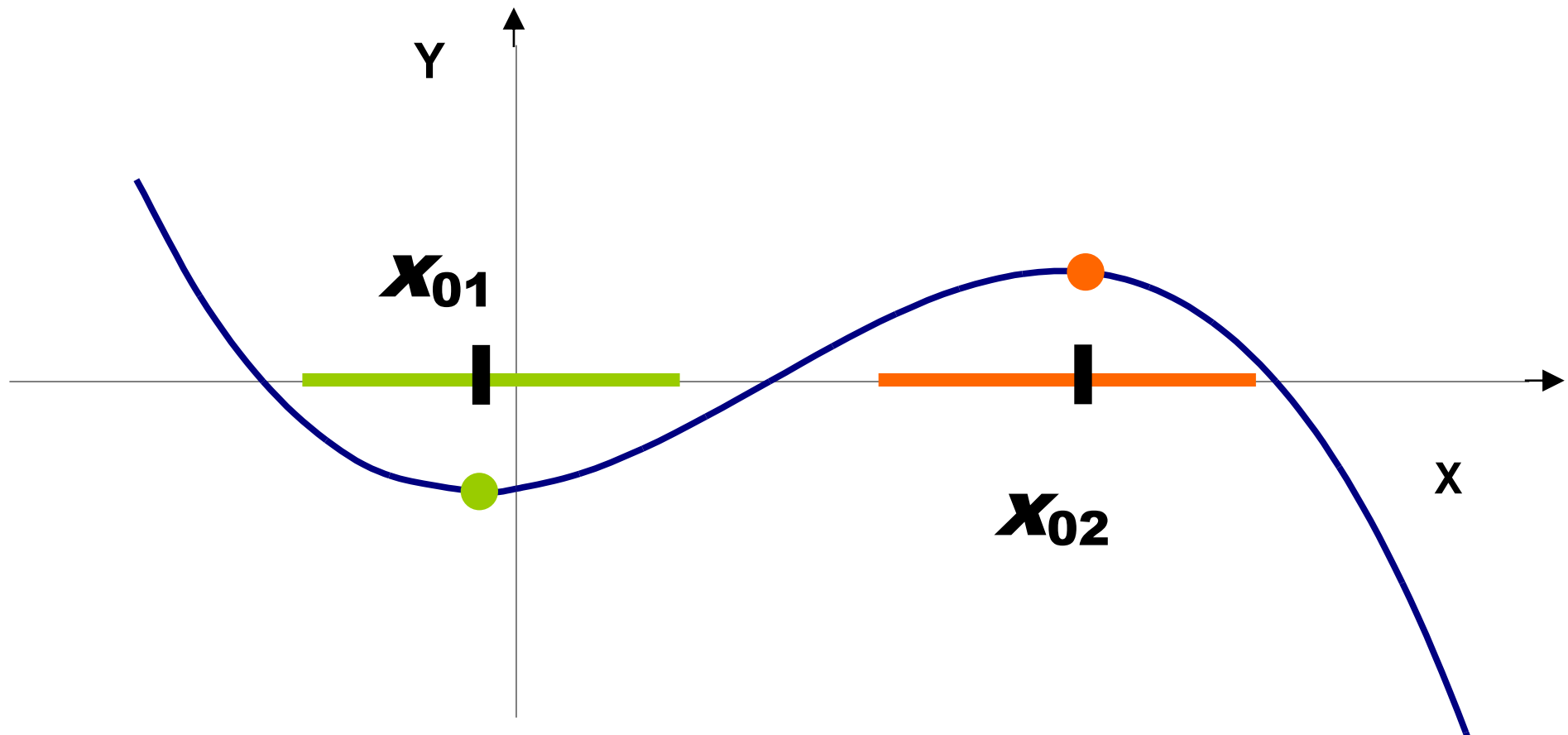
Maksimum lokalne cd.



Maksimum lokalne cd.



Ekstrema lokalne



* Definicje ekstremów lokalnych

Funkcja $f : (a ; b) \rightarrow \mathbf{R}$ ma **minimum lokalne** w punkcie $x_0 \in (a ; b)$, gdy istnieje taki przedział $(x_0 - r ; x_0 + r)$ zawarty w dziedzinie, że wartość $f(x_0)$ jest najmniejsza ze wszystkich wartości funkcji w tym przedziale.

Funkcja $f : (a ; b) \rightarrow \mathbf{R}$ ma **maksimum lokalne** w punkcie $x_0 \in (a ; b)$, gdy istnieje taki przedział $(x_0 - r ; x_0 + r)$ zawarty w dziedzinie, że wartość $f(x_0)$ jest największa ze wszystkich wartości funkcji w tym przedziale.

Wykrywanie ekstremów lokalnych

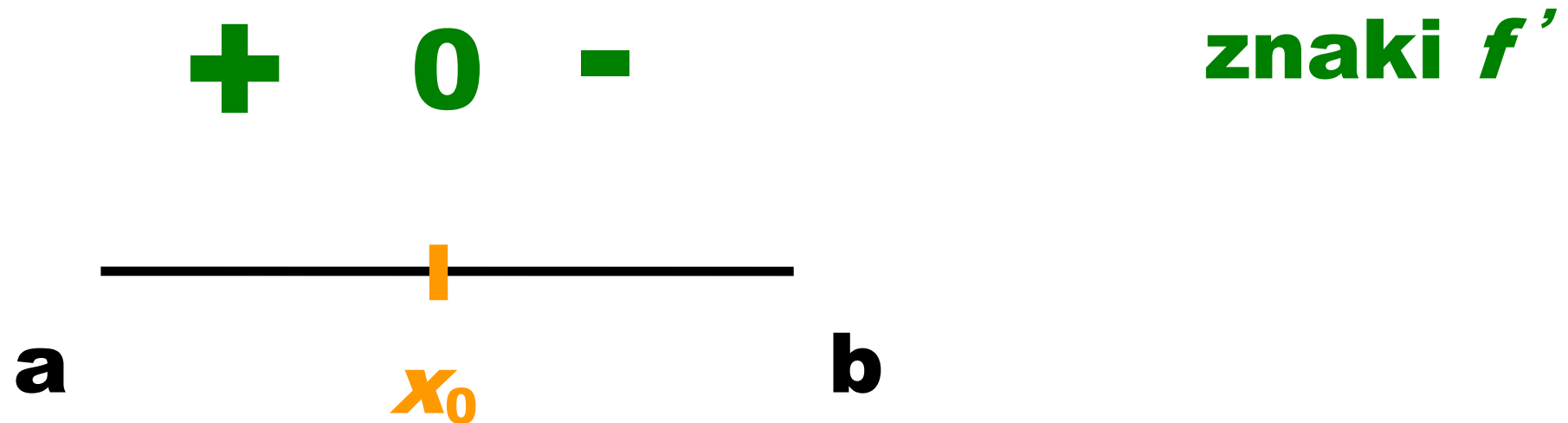
Twierdzenie

Niech funkcja $f: (a; b) \rightarrow \mathbf{R}$ będzie różniczkowalna na przedziale $(a; b)$.
Jeśli f posiada ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$ to $f'(x_0) = 0$.

Wniosek z tw. 2

Warunek $f'(x_0) = 0$ jest **warunkiem koniecznym** istnienia ekstremum lokalnego w punkcie x_0 . **Nie jest jednak warunkiem dostatecznym.**

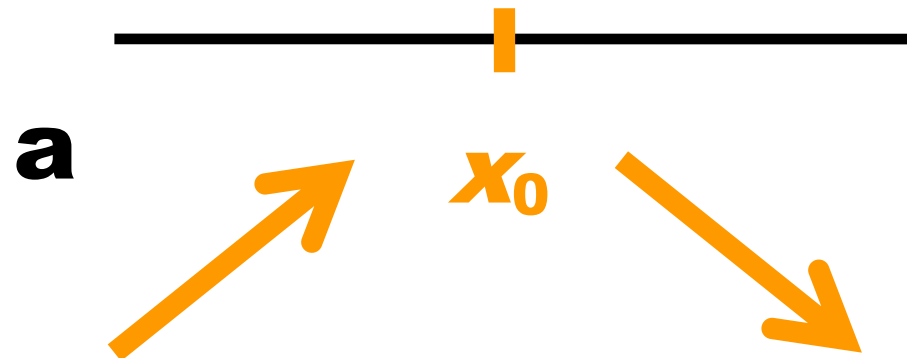
Wykrywanie maksimum lokalnego



Wykrywanie maksimum lok. cd.

+ **0** **-**

znaki f'



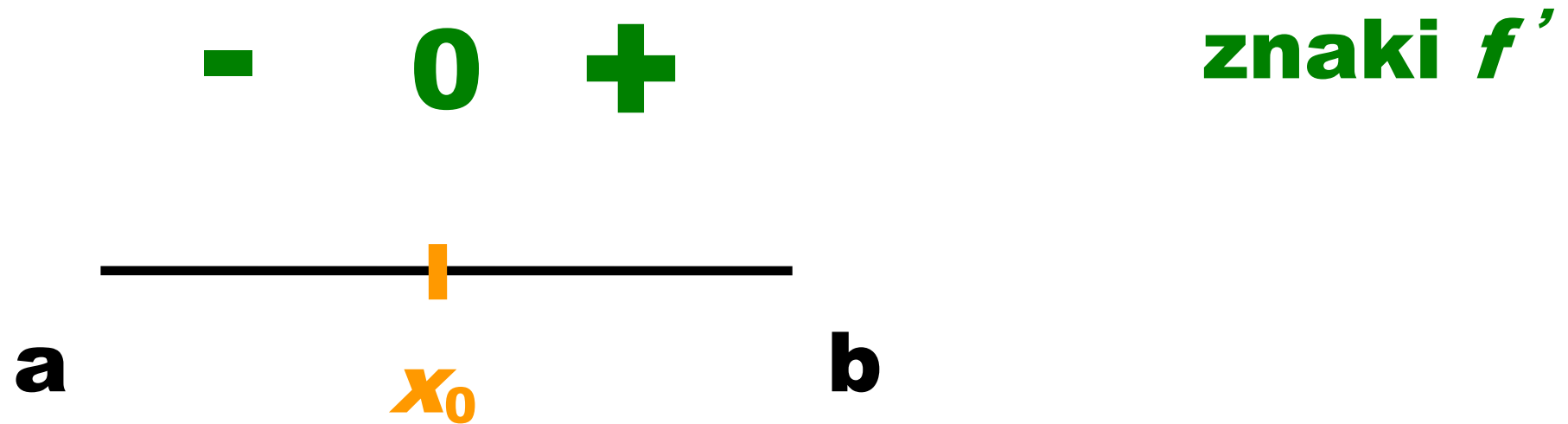
monotoniczność f

**maksimum
lokalne w x_0**

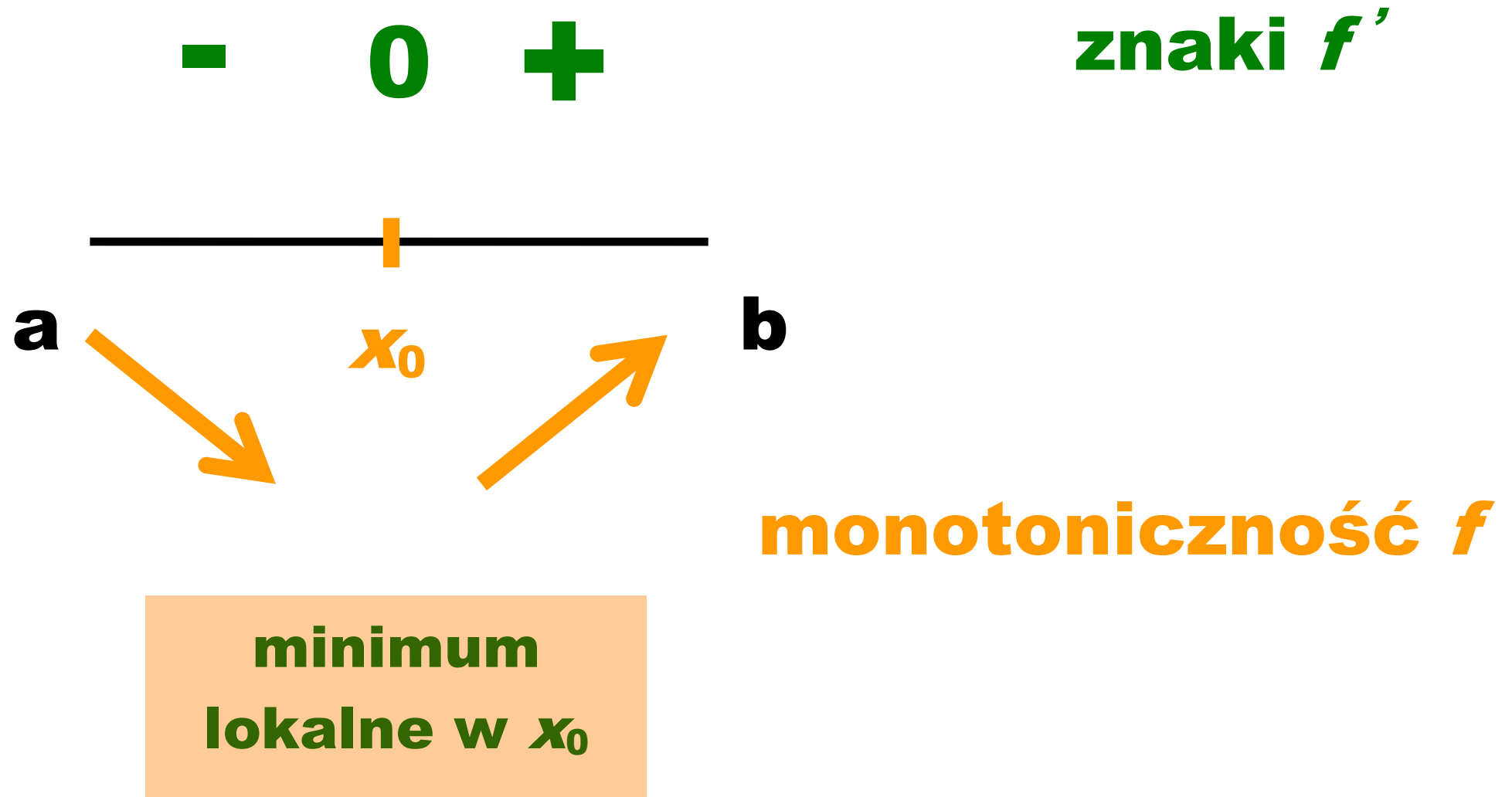
Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a, b) i dla pewnego $x_0 \in (a, b)$ zachodzi $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje taki przedział $(x_0 - r; x_0 + r)$ należący do dziedziny, że dla $x \in (x_0 - r, x_0)$ $f'(x) > 0$ oraz dla $x \in (x_0, x_0 + r)$ $f'(x) < 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Wykrywanie minimum lokalnego



Wykrywanie minimum lok. cd.



Twierdzenie

Jeśli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a, b) i dla pewnego $x_0 \in (a, b)$ zachodzi $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje taki przedział $(x_0 - r; x_0 + r)$ należący do dziedziny, że dla $x \in (x_0 - r, x_0)$ $f'(x) < 0$ oraz dla $x \in (x_0, x_0 + r)$ $f'(x) > 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

Przykład

Zad. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Rozwiązanie

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x} \right)' = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

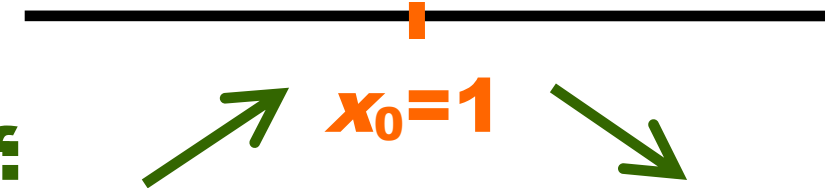
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Odpowiedź

znaki f' :

+ 0 -

monotoniczność f



maksimum lokalne

Funkcja $f(x) = \frac{x}{e^x}$ jest :

$f \uparrow$ dla $x < 1$, $f \downarrow$ dla $x > 1$.

Dla $x=1$ przyjmuje maksimum lokalne o wartości

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Reguła de L'Hospitala

Tw 5. Jeśli w wyrażeniu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, iloraz funkcji jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0} \right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ oraz istnieje granica ilorazu pochodnych tych funkcji $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga. Tw. 5 jest prawdziwe dla x_0 skończonych oraz dla $x_0 = \pm\infty$, a także dla granic jednostronnych.

Przykład

Zadanie. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Przykład

Zadanie. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Rozwiązanie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Badanie przebiegu zmienności

Badanie przebiegu zmienności

Zadanie. Dla funkcji danej wzorem $y = f(x)$
wyznacz:

- 1. dziedzinę**
- 2. punkty wspólne wykresu z osiami OX, OY**
- 3. granice oraz asymptoty**
- 4. pochodną $f'(x)$ oraz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne**
- 5. zestaw wyników w tabeli**
- 6. naszkicuj wykres**

Przykład 1

Zadanie. Wykonaj badanie przebiegu zmienności funkcji

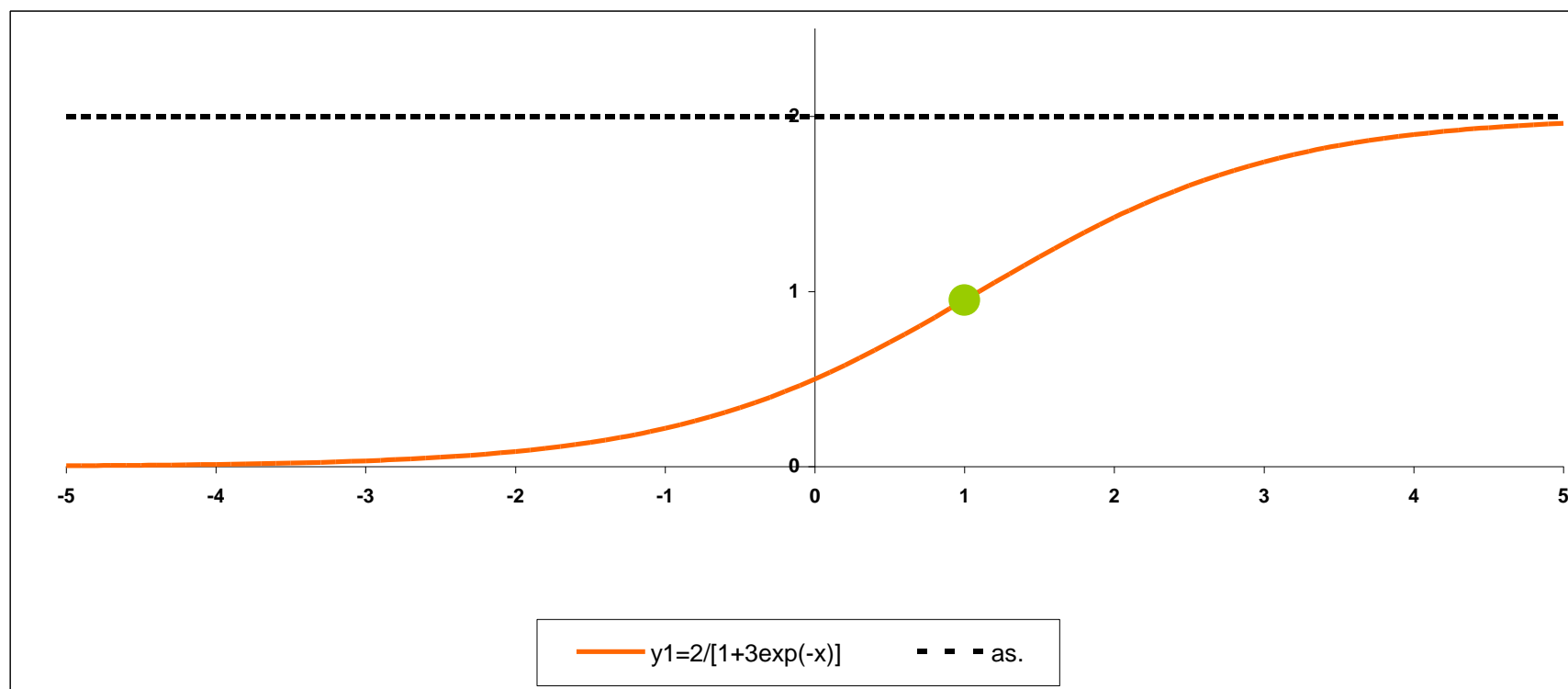
$$f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-x}}$$

Na tablicy

Przykład 1

Funkcja logistyczna

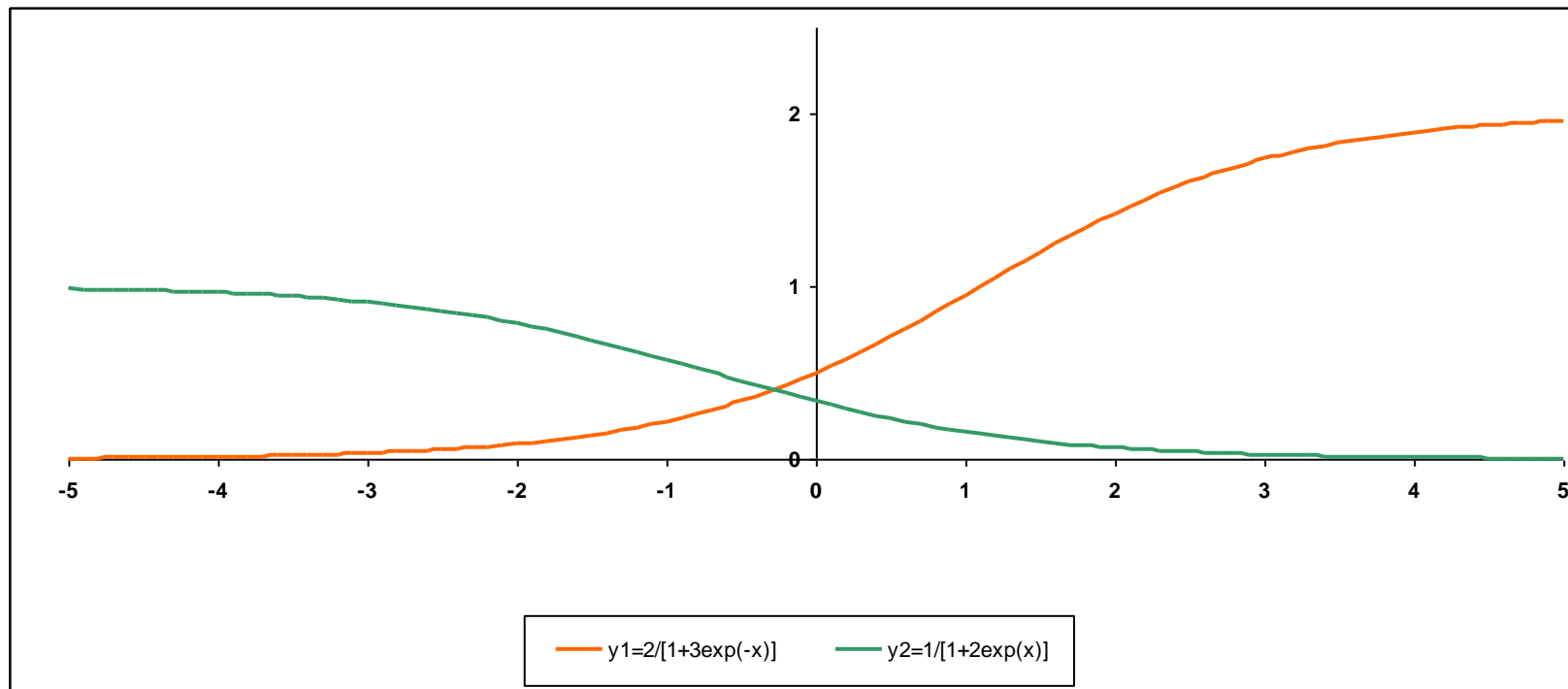
$$f(x) = \frac{2}{1 + 3e^{-x}}$$



Przykład 2

Funkcja logistyczna

$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$$



Przykład 3

Zadanie. Wykonaj badanie przebiegu zmienności funkcji

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1. Dziedzina

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$D = R$$

2. Punkty wspólne z osiami

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

z OX:

$$A(0, 0)$$

z OY:

ten sam

3. Granice i asymptoty

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{H}{=} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

$y = 0$ as. pozioma prawostronna

4. Pochodna i wnioski

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x} \right)' = \frac{(1-x)}{e^x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

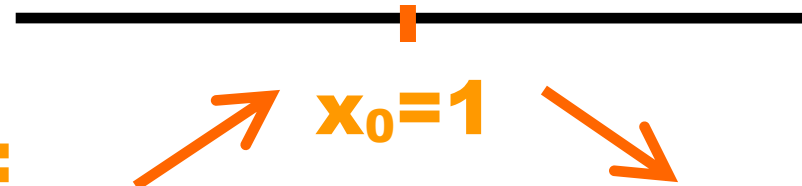
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

4. Pochodna i wnioski cd.

znaki f' :

+ **0** **-**

monotoniczność f :



**maksimum
lokalne**

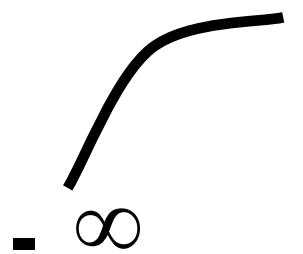
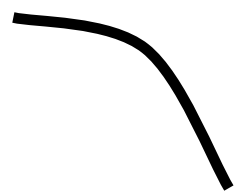
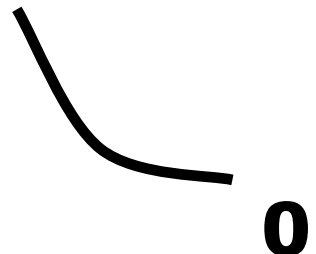
Funkcja $f(x) = \frac{x}{e^x}$ jest

$f \uparrow$ dla $x < 1$, $f \downarrow$ dla $x > 1$,

dla $x=1$ przyjmuje maksimum lokalne

o wartości $y_{max} = f(1) = \frac{1}{e}$.

5. Tabela

| x | $(-\infty ; 1)$ | 1 | $(1 ; 2)$ | 2 | $(2 ; +\infty)$ |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ |  | $y_{\max} = 1/e$ |  | pp |  |

$y=0$ as. pion.
prawostr.

6. Wykres

