# Temat wykładu:

# Funkcja. Granica funkcji

***Kody kolorów:***

***żółty – nowe pojęcie***

***pomarańczowy – uwaga***

***kursywa – komentarz***

**** – materiał nadobowiązkowy***

# Zagadnienia

1. **Przypomnienie: funkcja, argument, wartość, dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe, wykres, monotoniczność, ekstremum (globalne)**
2. **Granica funkcji**
3. **Asymptoty funkcji**

# Funkcja

**Definicja.** Niech $X \subset R$, $Y \subset R$.

Funkcją $f$ określoną na zbiorze $X$ o wartościach ze zbioru $Y$ nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie $x \in X$ dokładnie jednej liczby $y \in Y$.

Ozn.: $$f : X \to Y$$

# Funkcja – terminologia

$$f: X \to Y \qquad x \xrightarrow{f} y \qquad y = f(x)$$

$x$ – **argument** funkcji, $x \in X$

$X$ – **dziedzina** funkcji

$D$, $D_f$ – oznaczenie dziedziny funkcji $f$,
w tym kursie przyjmujemy, że $D \subset R$.

$y = f(x)$ – **wartość** funkcji

$$\{\, y \in Y : \textit{istnieje} \quad x \in X \textit{ takie, że } \; y = f(x) \,\} = Y_W$$

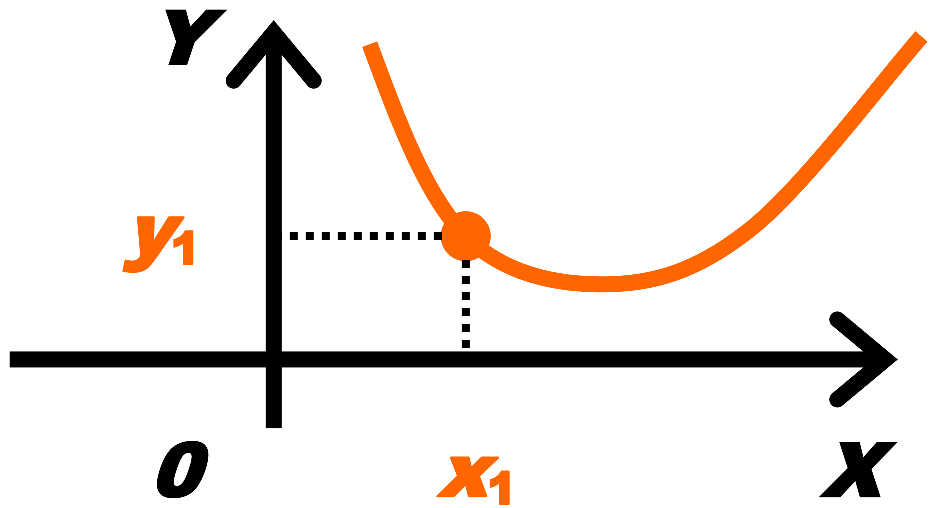
$Y_W$ – **zbiór wartości** funkcji $\quad Y_W \subset Y$

# Sposoby przedstawienia funkcji

## tabelka

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

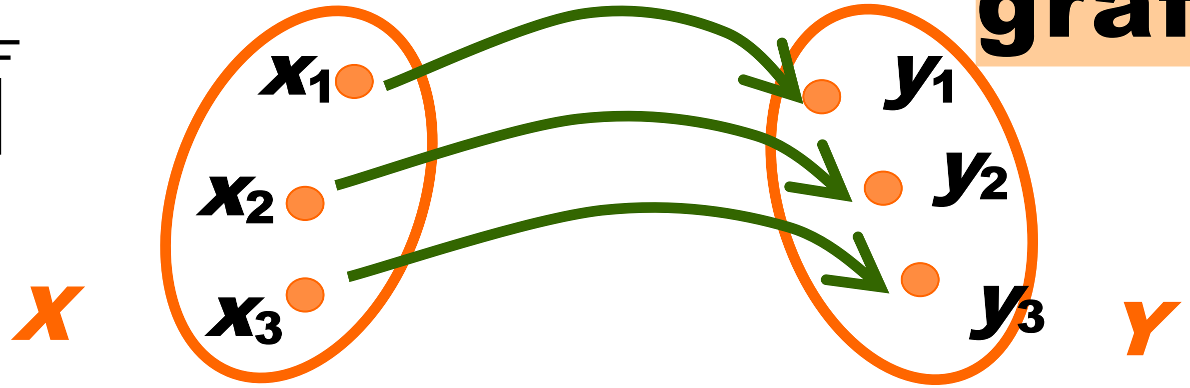
## wykres




## wzór

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

## graf



# Wykres funkcji

**Wykres funkcji rysujemy w układzie współrzędnych kartezjańskich $XOY$.**

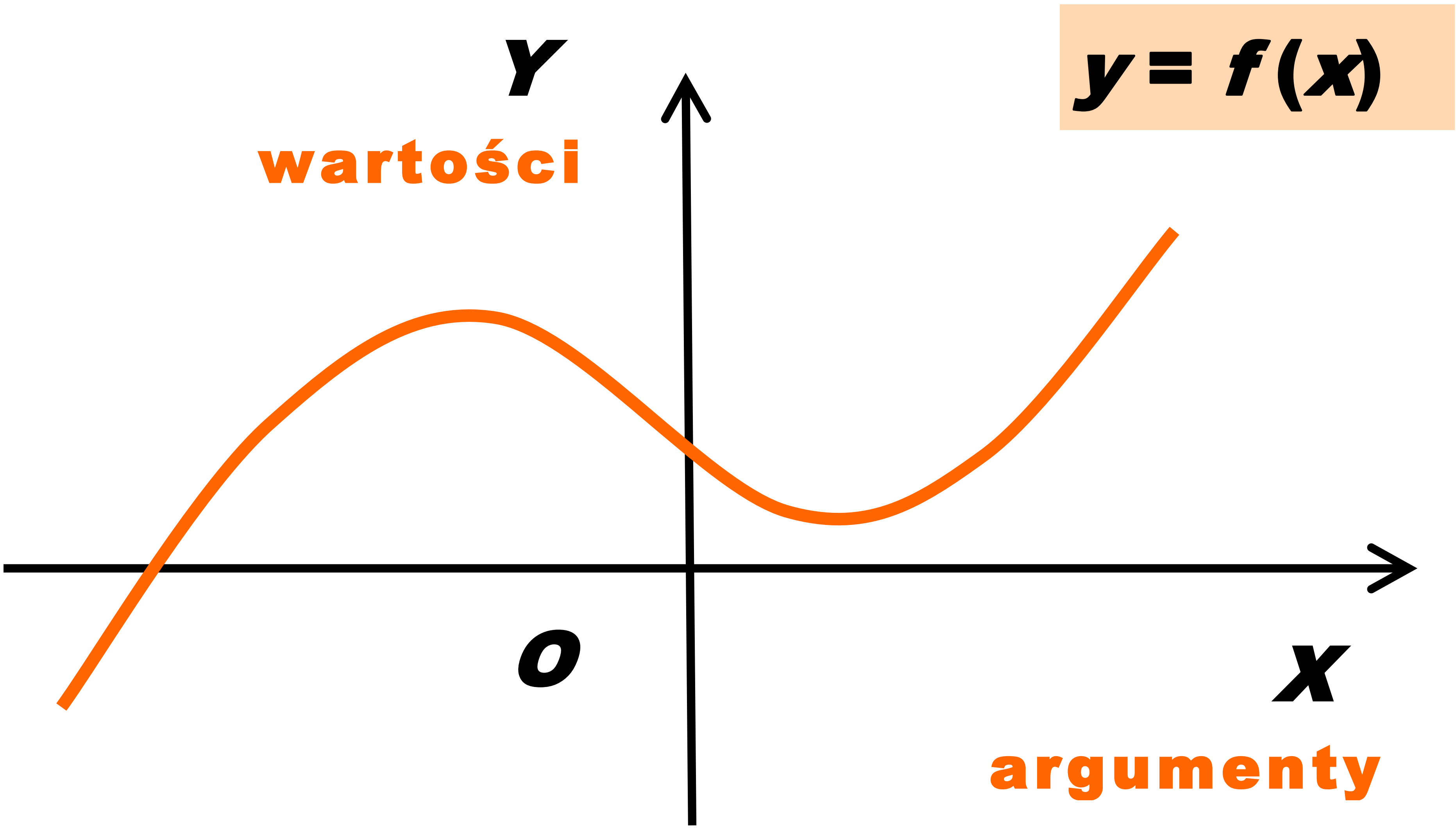
**Układ tworzą osie liczbowe:**

**pozioma $OX$ $\rightarrow$ - oś odciętych**

**pionowa $OY$ $\rightarrow$ - oś rzędnych**

**Definicja. Jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$ dana jest wzorem $y = f(x)$, to wykresem funkcji w układzie $XOY$ jest zbiór wszystkich punktów o współrzędnych ($x$, $y$) takich, że $x$ jest argumentem funkcji, a $y$ jest wartością funkcji dla argumentu $x$ ($y = f(x)$).**

# Wykres funkcji

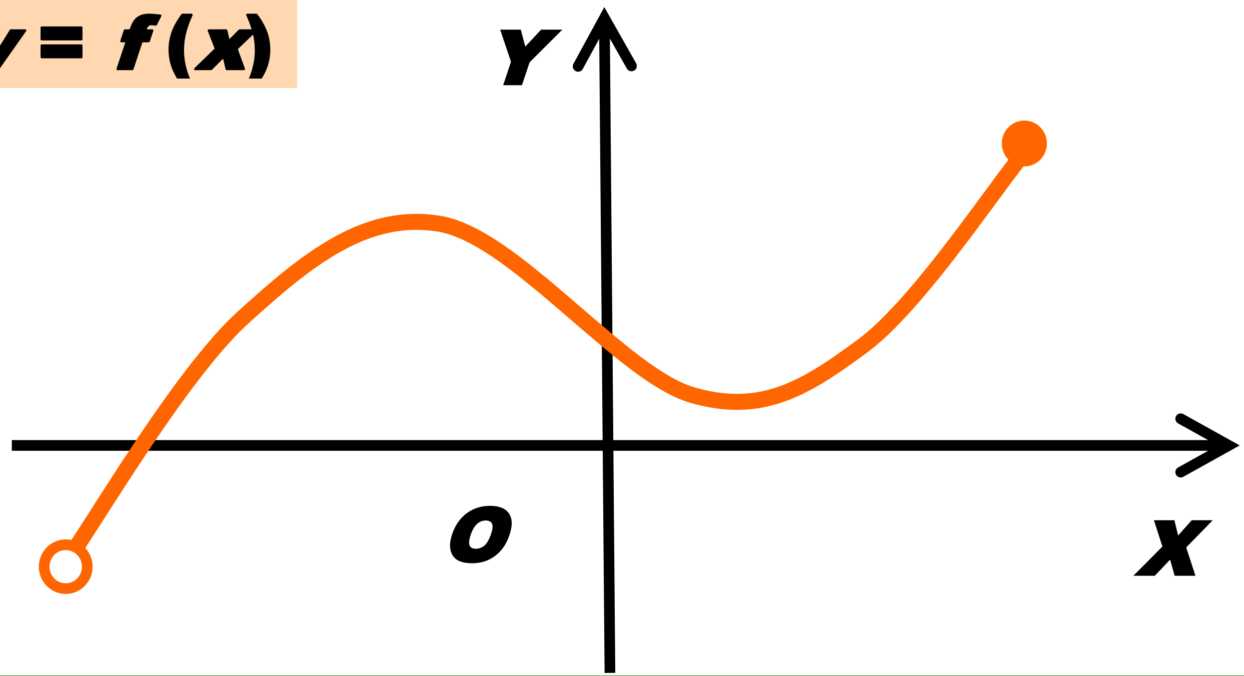


# Wykres funkcji – umowa

**Na wykresie funkcji:**

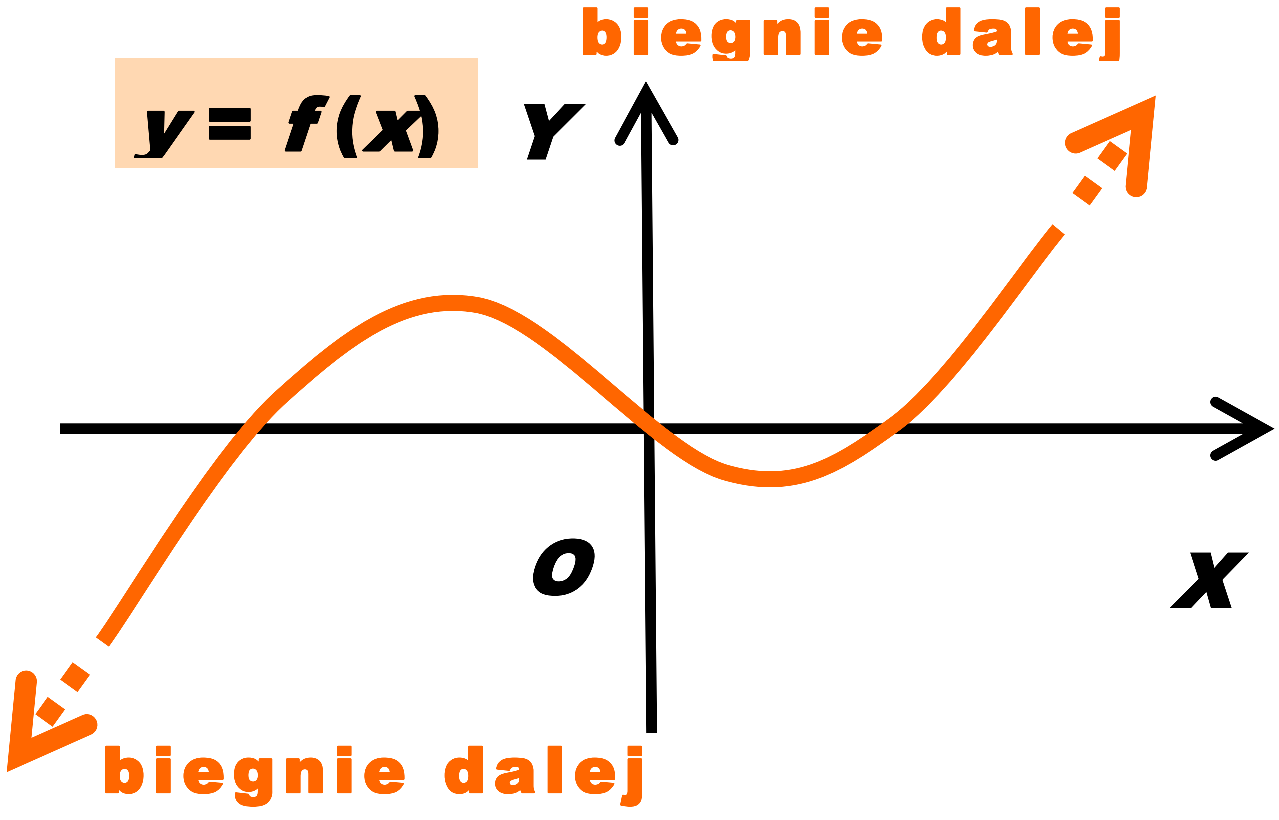
- **punkt zaznaczony kropką należy do wykresu,**
- **punkt zaznaczony pustym kółkiem nie należy do wykresu.**

$y = f(x)$



# Wykres funkcji – umowa cd.

**Gdy na rysunku wykres nie jest zakończony ani kropką, ani pustym kółkiem oznacza to, że biegnie dalej.**



# Dziedzina funkcji - umowa

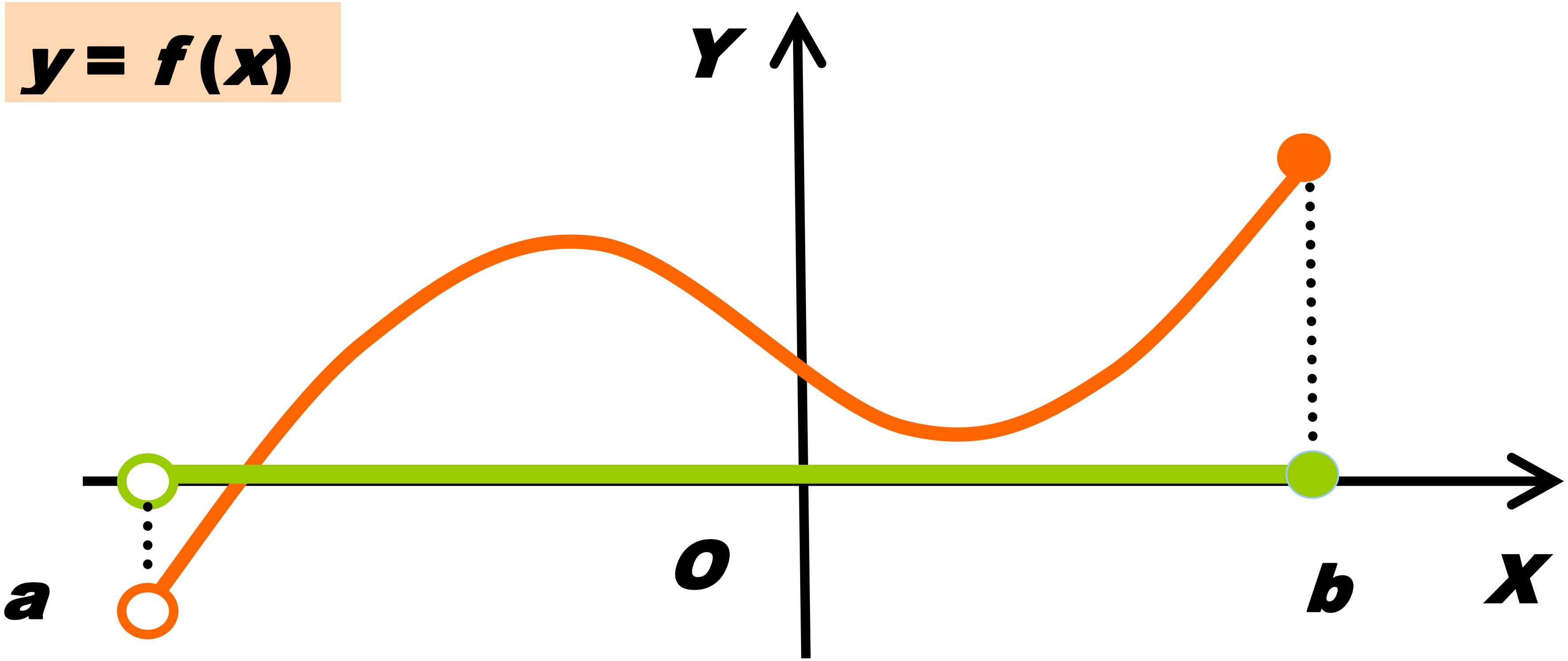
**Jeśli funkcja dana jest wzorem, to do jej dziedziny należą wszystkie liczby, dla których wzór funkcyjny ma sens.**

**<u>Przykład</u>. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

# Dziedzina funkcji na wykresie

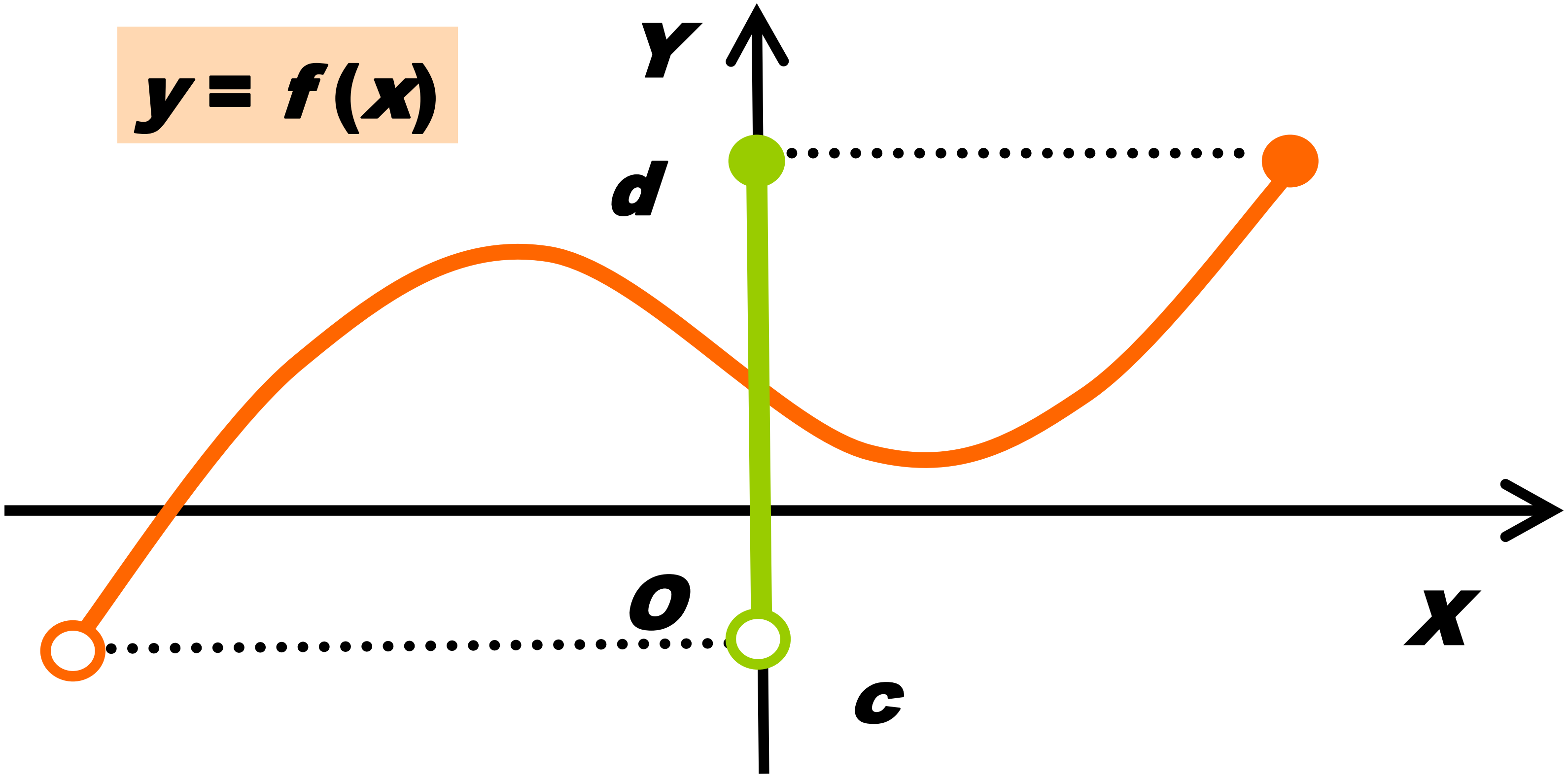
**Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji $y = f(x)$.**




$$D = (a; b\rangle$$

# Wykres funkcji – zadanie

**Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.**




$$Y_W = (c\,;\,d\rangle$$

# Monotoniczność funkcji – idea

**Funkcja $f: X \to Y$ jest rosnąca w przedziale $(a; b) \subset X$, jeśli większemu argumentowi z przedziału $(a; b)$ przyporządkowuje większą wartość.**

**Mówimy, że funkcja $f: X \to Y$ jest malejąca w przedziale $(a; b) \subset X$, jeśli większemu argumentowi z przedziału $(a; b)$ przyporządkowuje mniejszą wartość.**

# Monotoniczność funkcji – definicje

Funkcja $f : X \to Y$ jest rosnąca

w przedziale $(a\,;b) \subset X$, jeśli

$$\underset{x_1,\,x_2 \in (a\,;b)}{\forall} \left[\, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \,\right]$$

Funkcja $f : X \to Y$ jest malejąca

w przedziale $(a\,;b) \subset X$, jeśli

$$\underset{x_1,\,x_2 \in (a\,;b)}{\forall} \left[\, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \,\right]$$

# Funkcja stała

**Funkcja $f : X \to Y$ jest stała w przedziale $(a\,;\,b) \subset X$, jeśli w tym przedziale jej wartości nie zmieniają się.**

# Monotoniczność funkcji

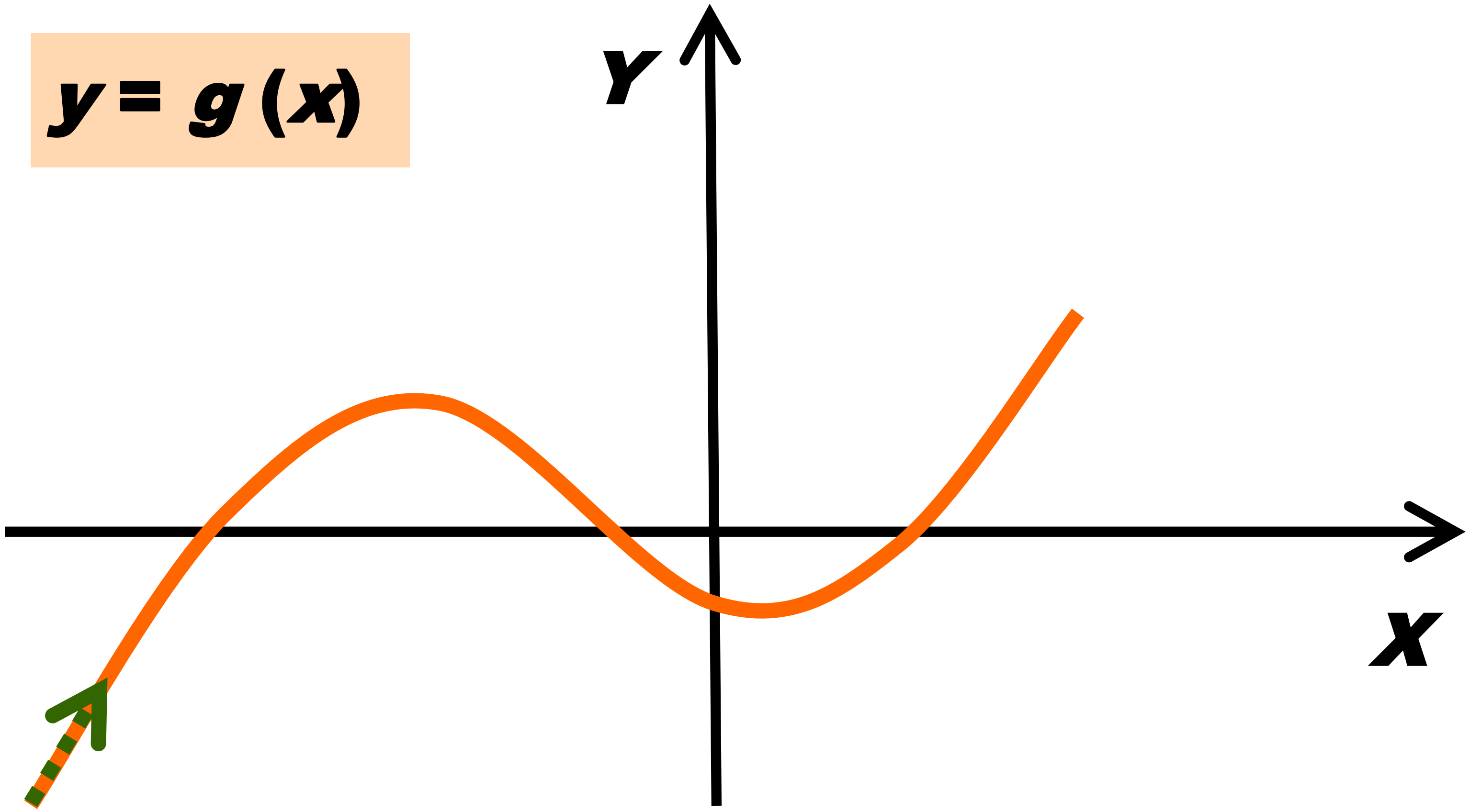
**Badanie monotoniczności funkcji polega na ustaleniu, w jakich przedziałach dziedziny funkcja rośnie, w jakich maleje, w jakich jest stała.**

## Zadanie 1

**Opisz monotoniczność funkcji $y = g(x)$ na podstawie wykresu.**

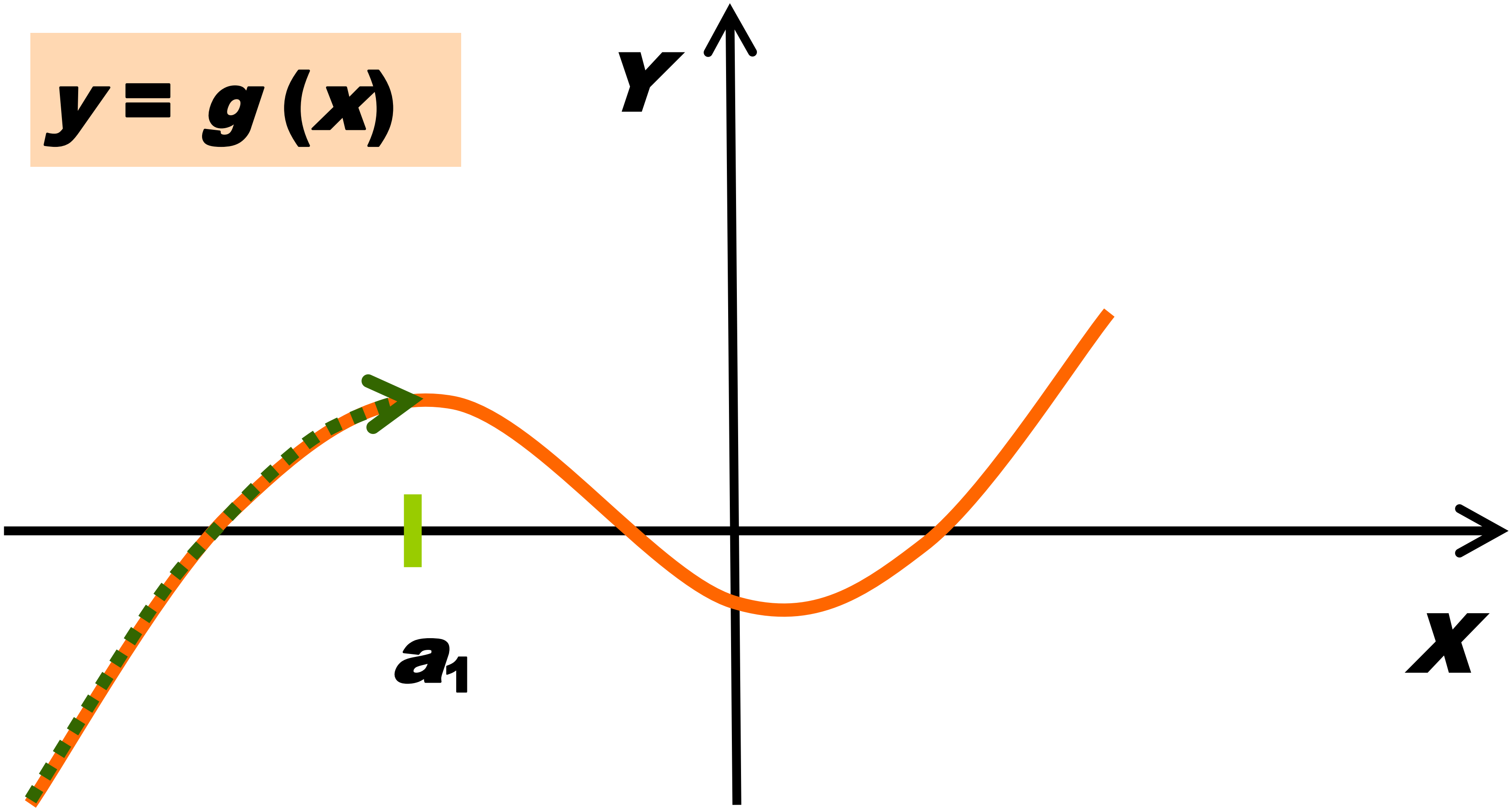
# Monotoniczność – zadanie 1.

$y = g(x)$




**Przesuwamy się po wykresie w kierunku rosnących argumentów *x* …**

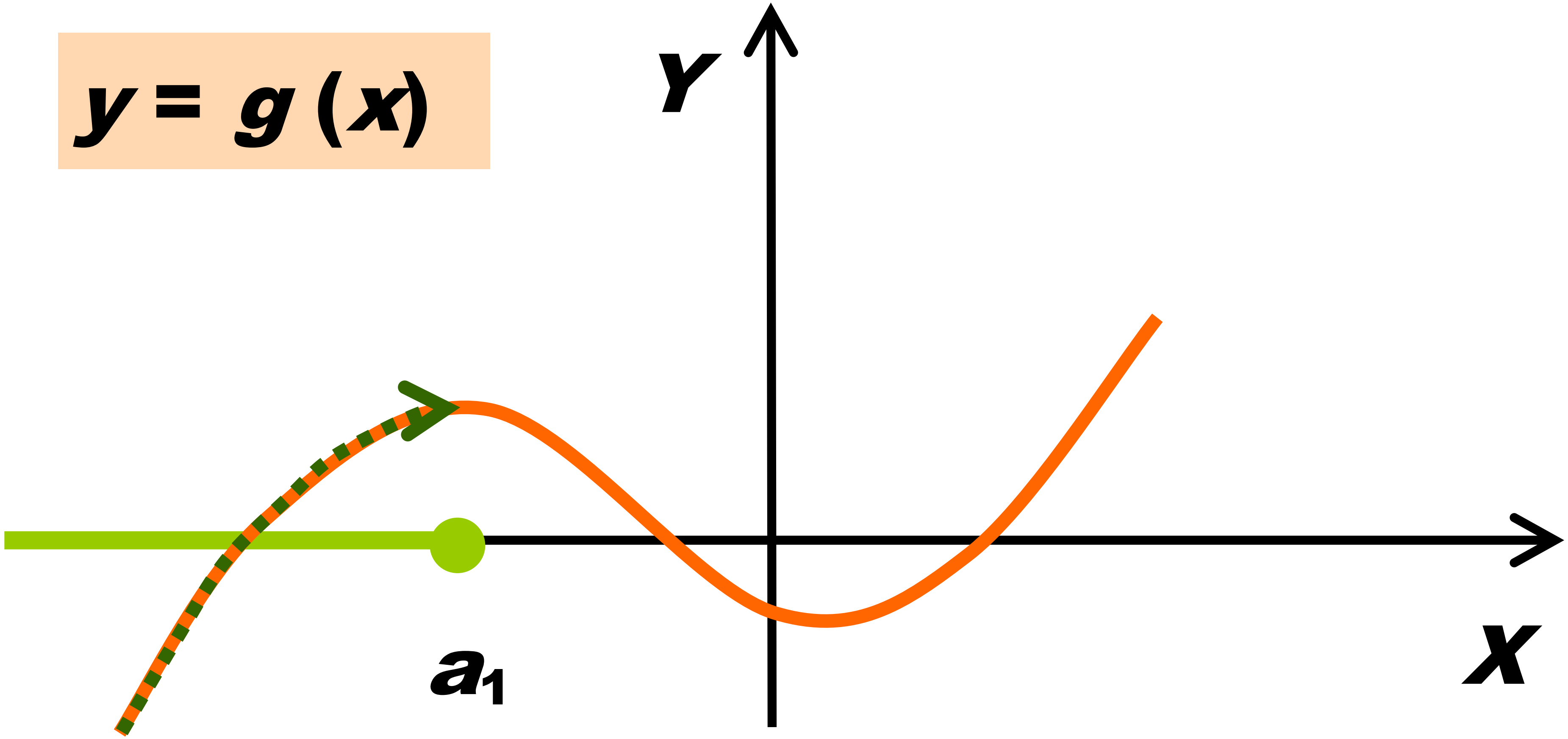
# Monotoniczność – zadanie 1.




**... dopóki wykres wznosi się do góry.**

# Monotoniczność – zadanie 1.

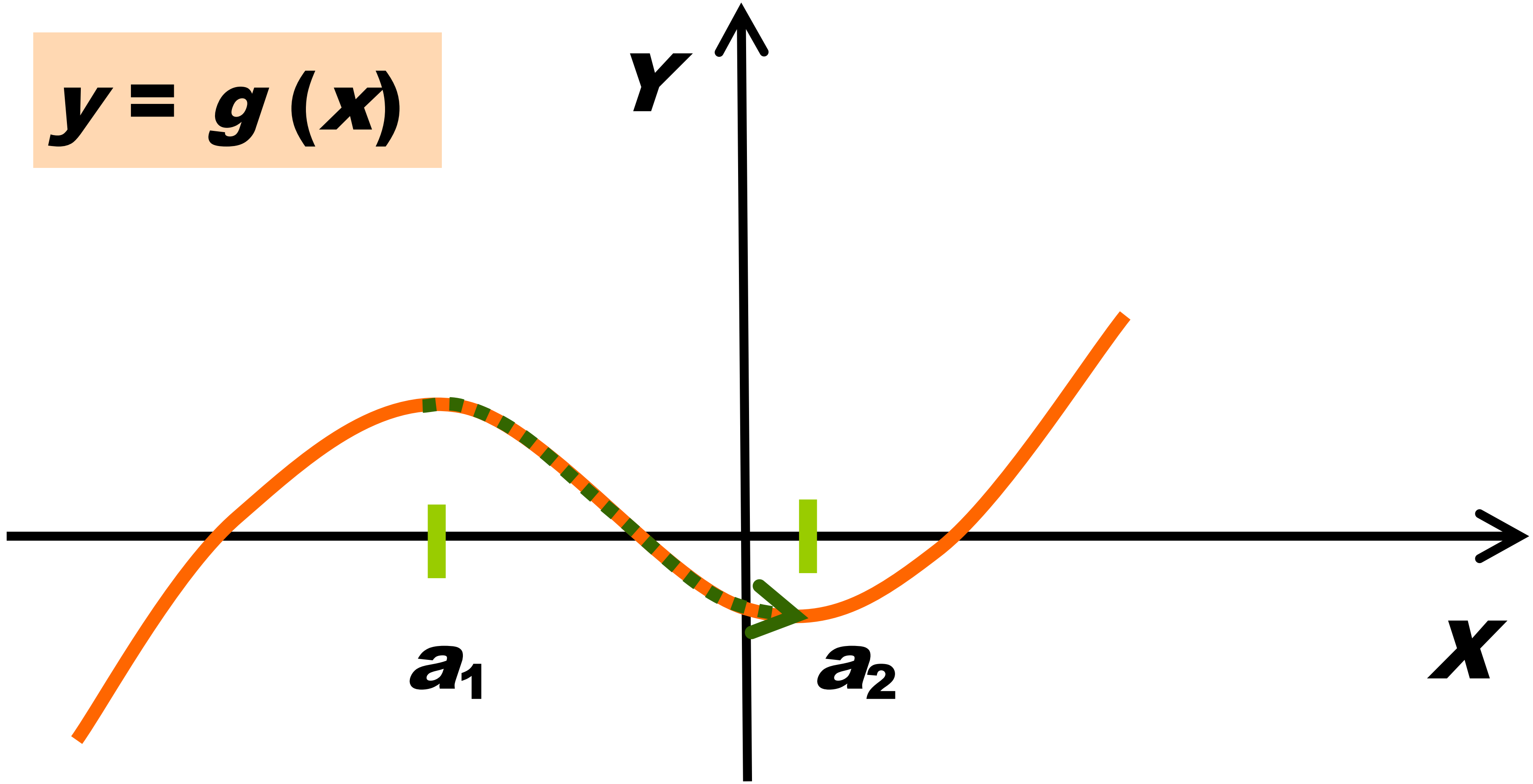
$y = g(x)$




**Taki przebieg wykresu oznacza, że dla $x \in (-\infty; a_1\rangle$ funkcja jest rosnąca.**

# Monotoniczność – zadanie 1.

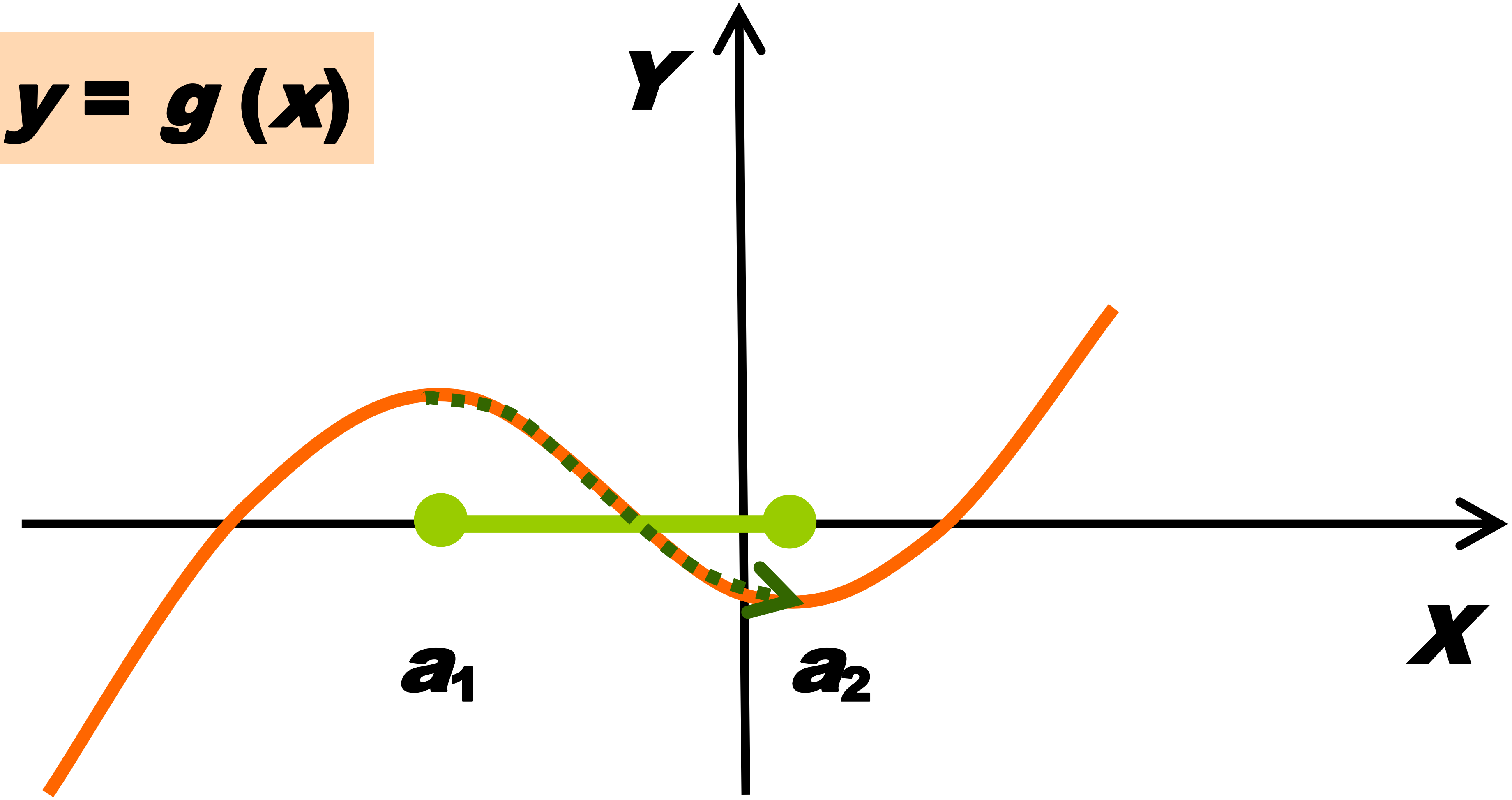
$y = g(x)$




**Teraz przesuwamy się po wykresie w kierunku rosnących argumentów $x$, dopóki wykres opada w dół.**

# Monotoniczność – zadanie 1.

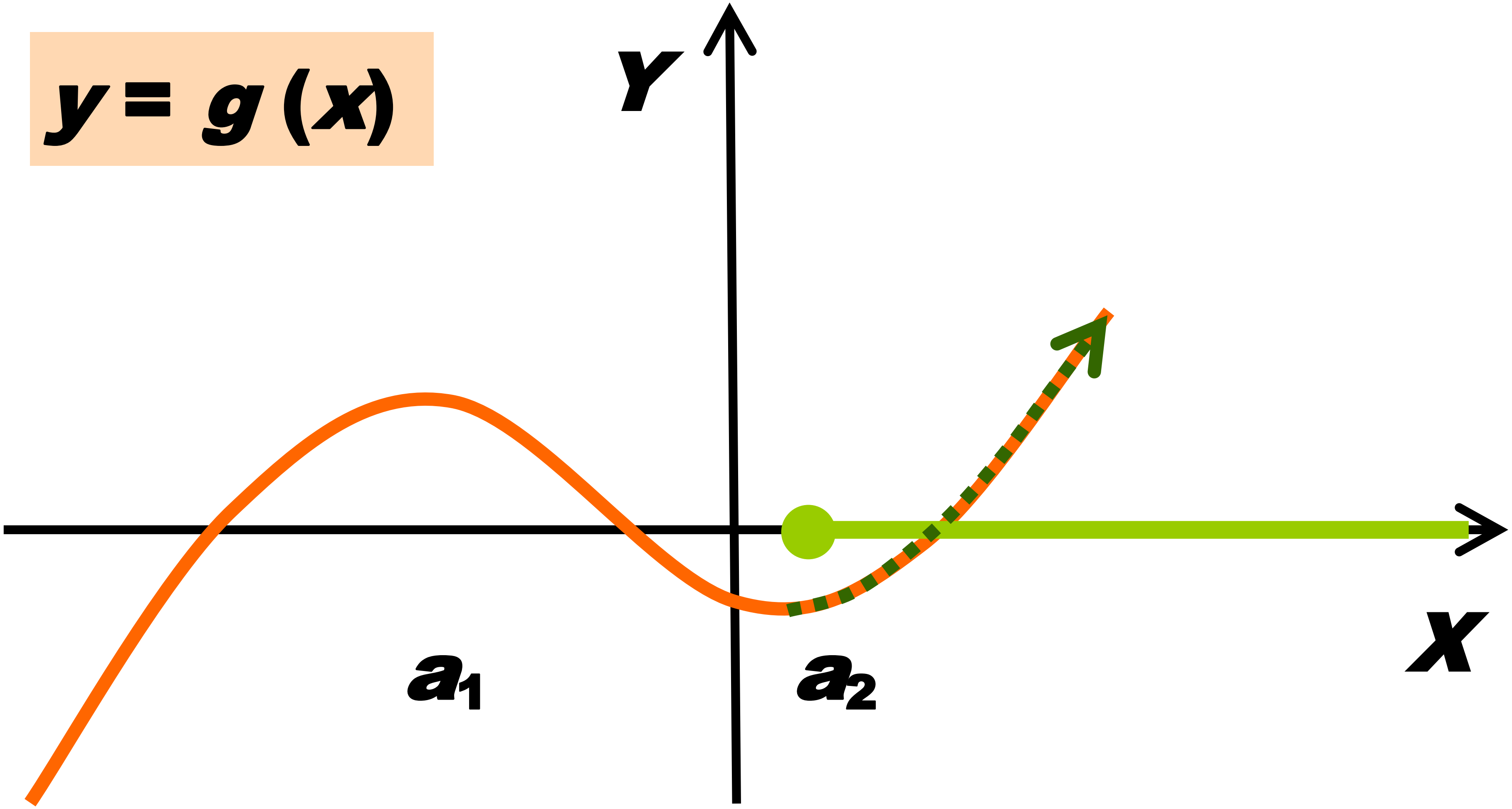
$y = g(x)$




$$f(x)\downarrow \quad \text{dla} \quad x \in \langle a_1 ; a_2 \rangle$$

# Monotoniczność – zadanie 1.

$y = g(x)$




$$f(x)\uparrow \quad dla \quad x \in \langle a_2; +\infty)$$

# Monotoniczność – zadanie 1.

**Odp.:**

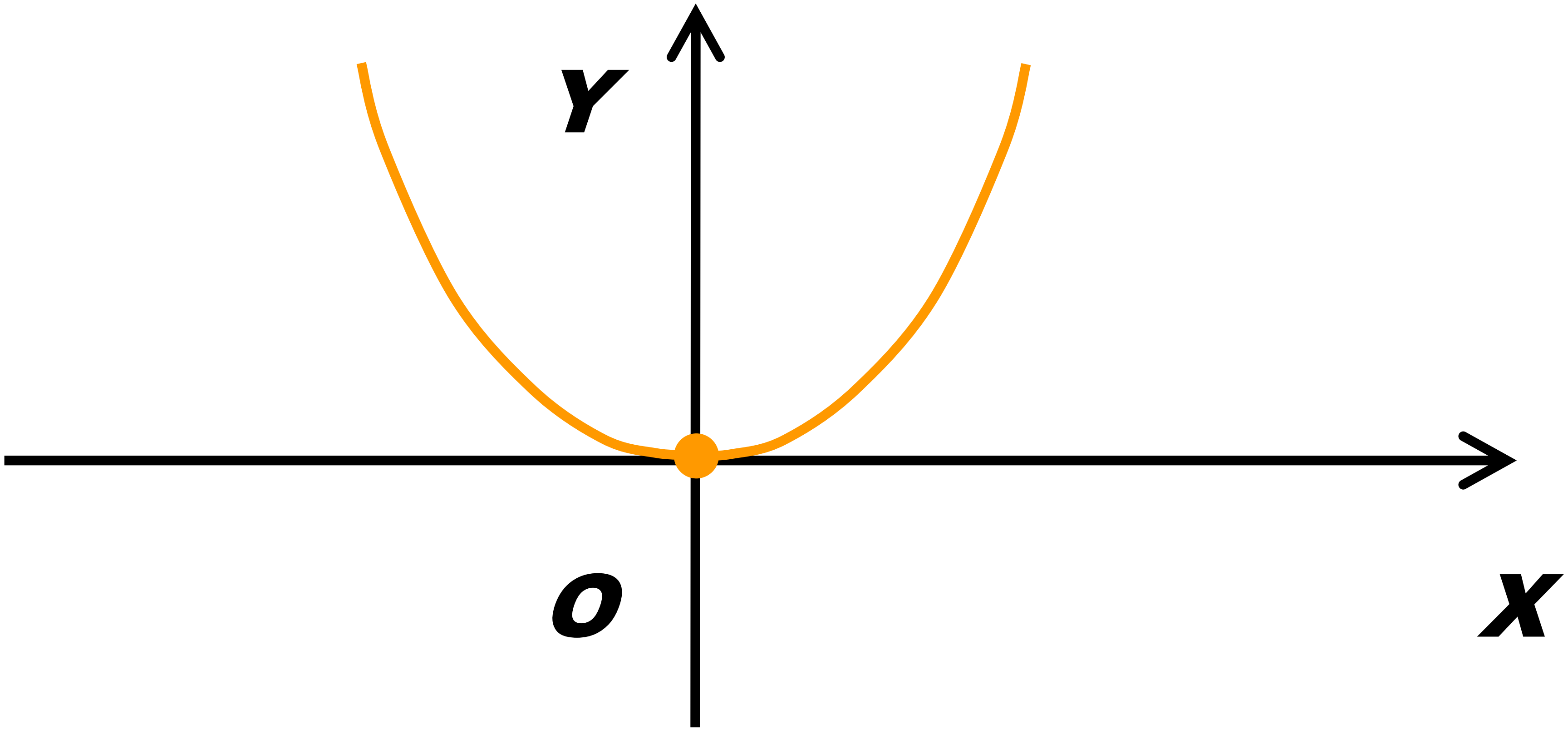
$$f(x)\uparrow \quad \textbf{dla} \quad x \in \left(-\infty\,;a_1\right\rangle, \quad x \in \left\langle a_2\,;+\infty\right)$$

$$f(x)\downarrow \quad \textbf{dla} \quad x \in \left\langle a_1\,;a_2\right\rangle$$

# Minimum globalne – idea

**Funkcja $f : X \to Y$ ma minimum globalne w punkcie $x_0 \in X$, jeśli wartość $f(x_0)$ jest najmniejsza ze wszystkich wartości funkcji w dziedzinie.**

# Przykład minimum globalnego

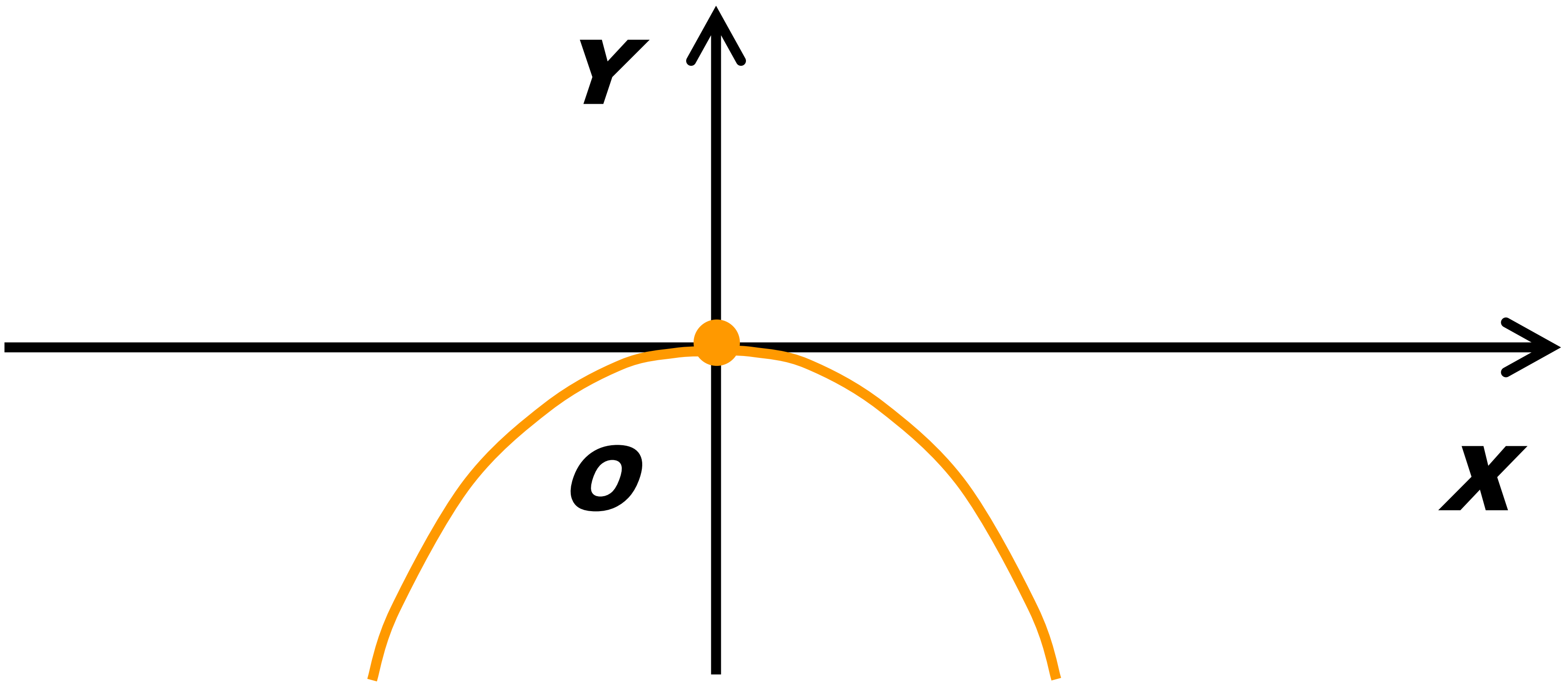



**W punkcie $x_0 = 0$ funkcja ma wartość najmniejszą – minimum globalne.**

# Maksimum globalne – idea

**Funkcja $f : X \to Y$ ma maksimum globalne w punkcie $x_0 \in X$, jeśli wartość $f(x_0)$ jest największa ze wszystkich wartości funkcji w dziedzinie.**

# Przykład maksimum globalnego

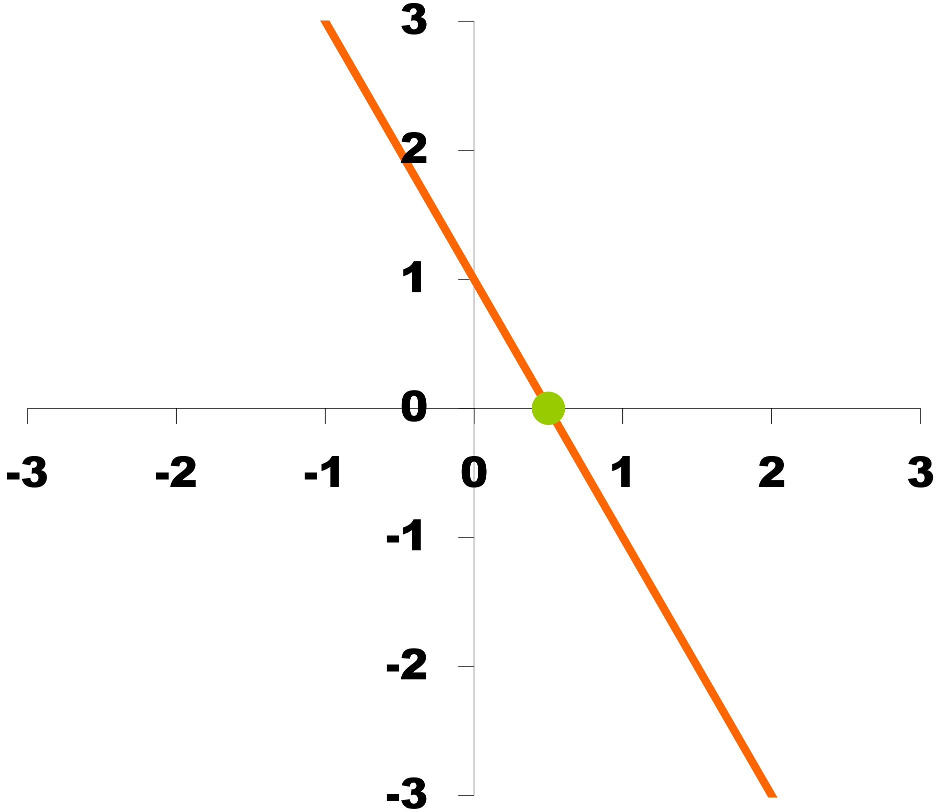



**W punkcie $x_0 = 0$ funkcja przyjmuje wartość największą – maksimum globalne.**

# Przykład 1

## Dany jest wzór funkcji

$$y = f(x) = -2x + 1$$




dziedzina $D_f = R$

zbiór wartości $R$

miejsce zerowe $x_0=0,5$

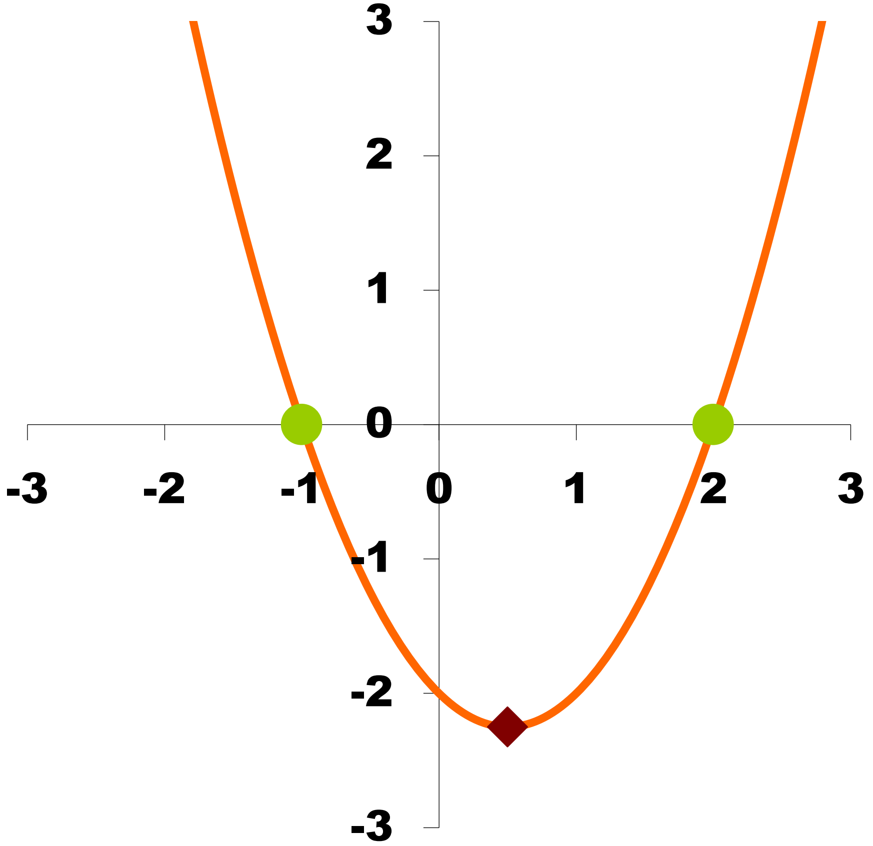
$f(x)>0$ dla $x < 0,5$
$f(x)<0$ dla $x > 0,5$

$f \downarrow$ w $R$

# Przykład 2

## Dany jest wzór funkcji

$$y = f(x) = x^2 - x - 2$$




dziedzina $D_f = R$

zbiór wartości $\left[-2\frac{1}{4}; +\infty\right)$

miejsca zerowe:

$x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$f \downarrow$ dla $x \leq 0{,}5$

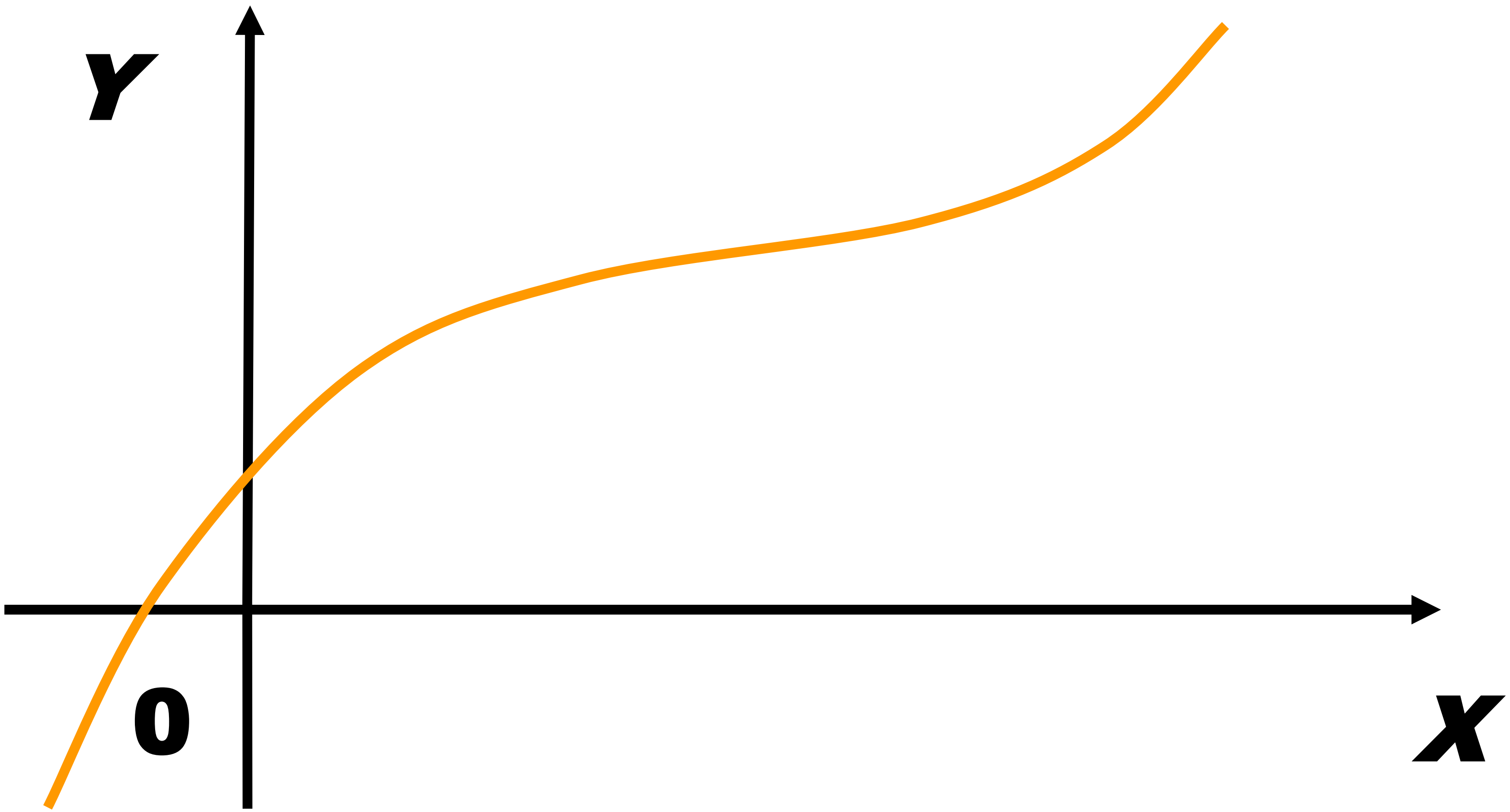
$f \uparrow$ dla $x \geq 0{,}5$

minimum

dla $x_{min}=0{,}5,\ y_{min}=-2{,}25$

# Granica funkcji w punkcie $x_0$

$$y = f(x)$$



# Granica funkcji w punkcie $x_0$

**Niech** $f: D \to R$**,** $y = f(x)$

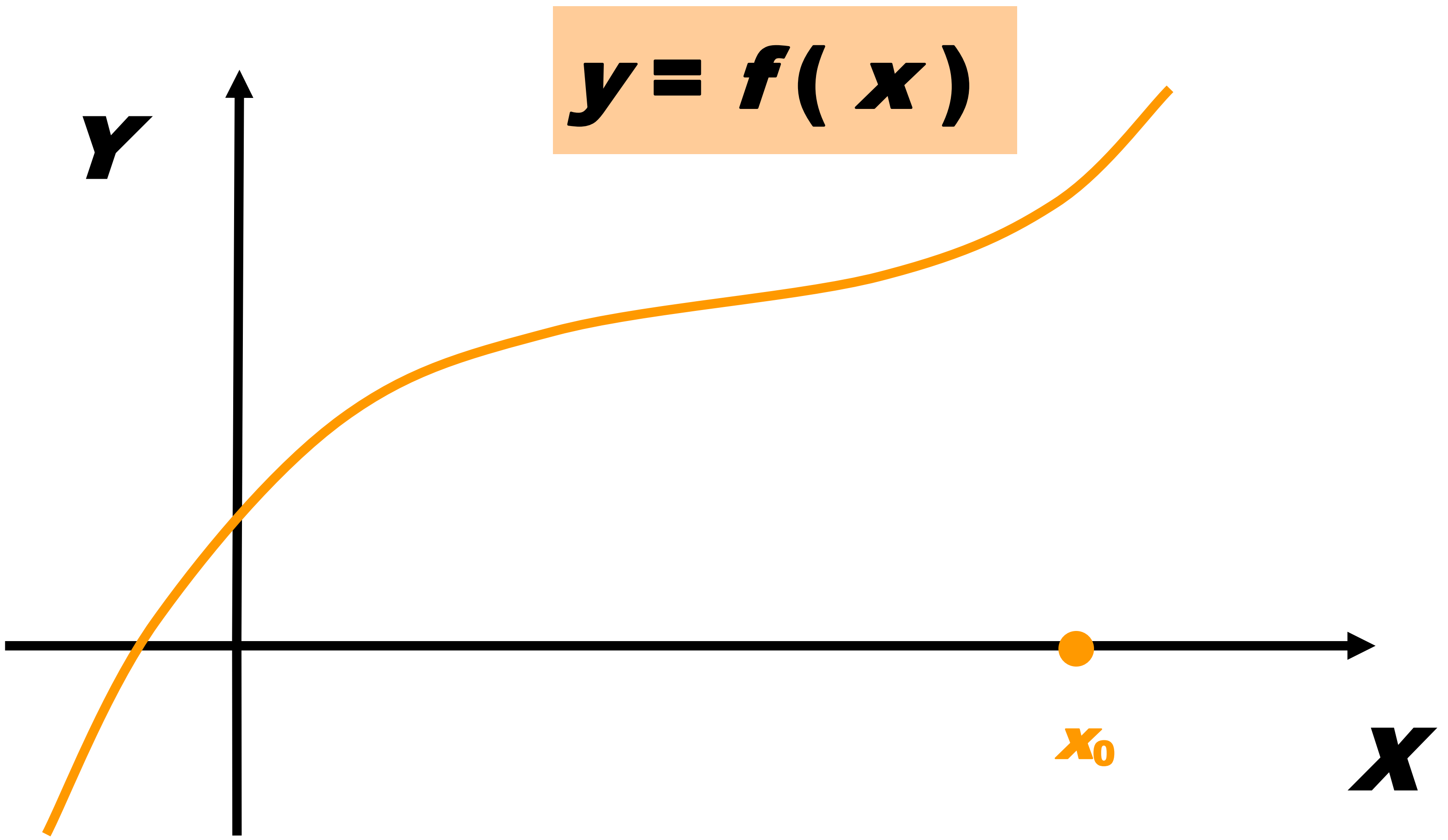
**Wybieramy punkt** $x_0$**,**

$$x_0 \in D \quad \text{lub} \quad x_0 \notin D$$

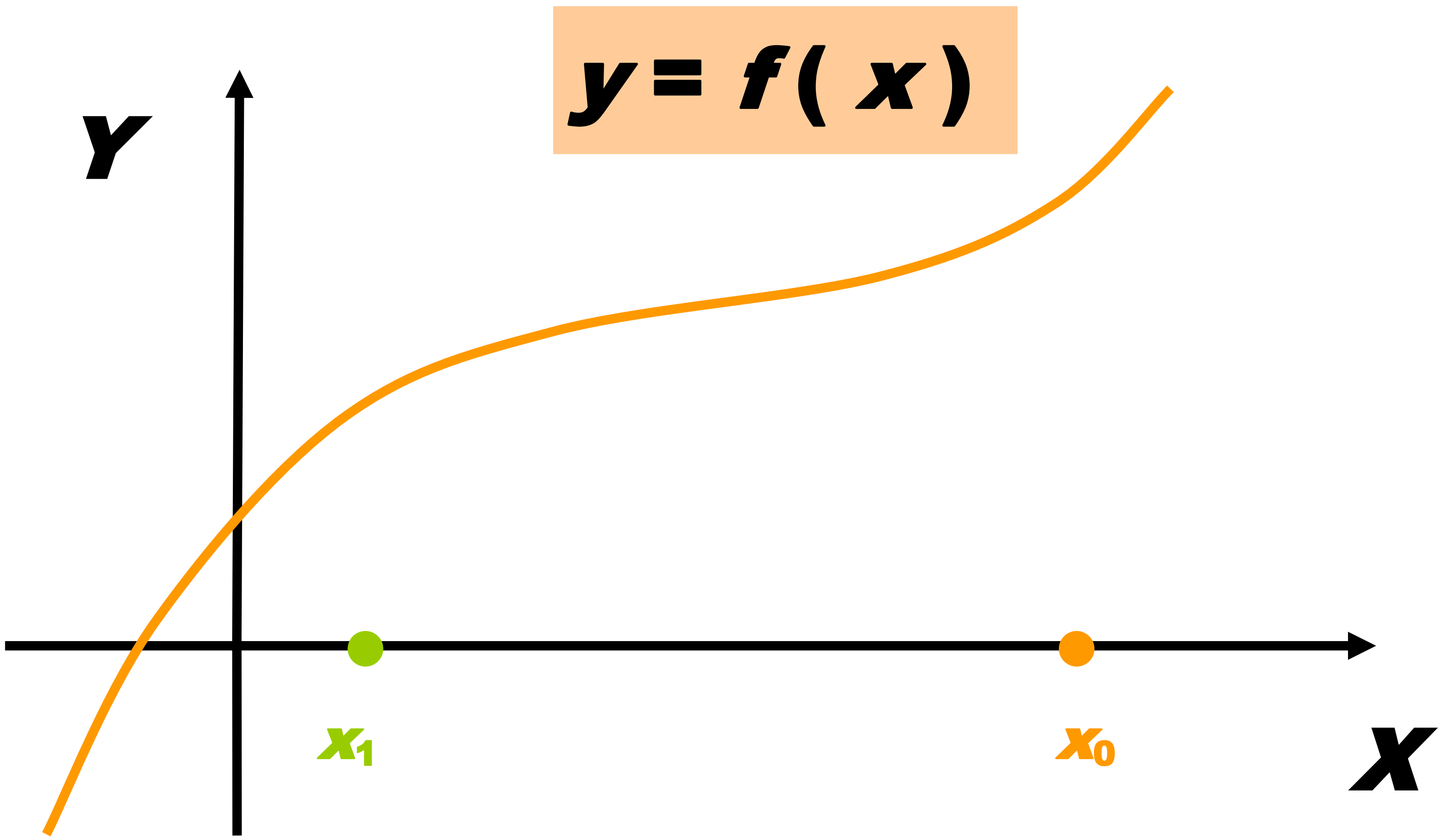
**Rozpatrujemy ciąg argumentów** $(x_n)$ **dążący do** $x_0$

$$x_n \to x_0$$

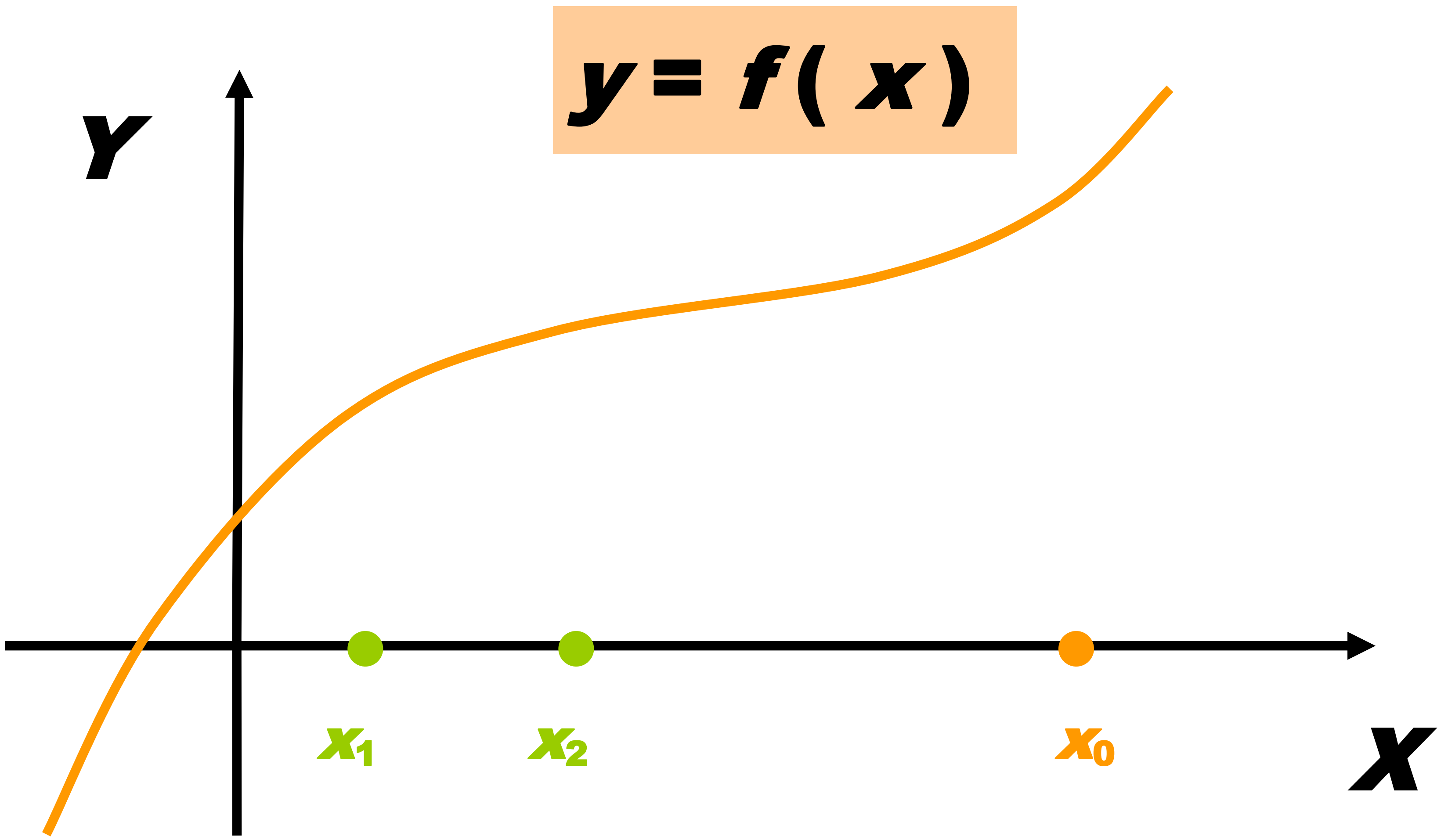
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



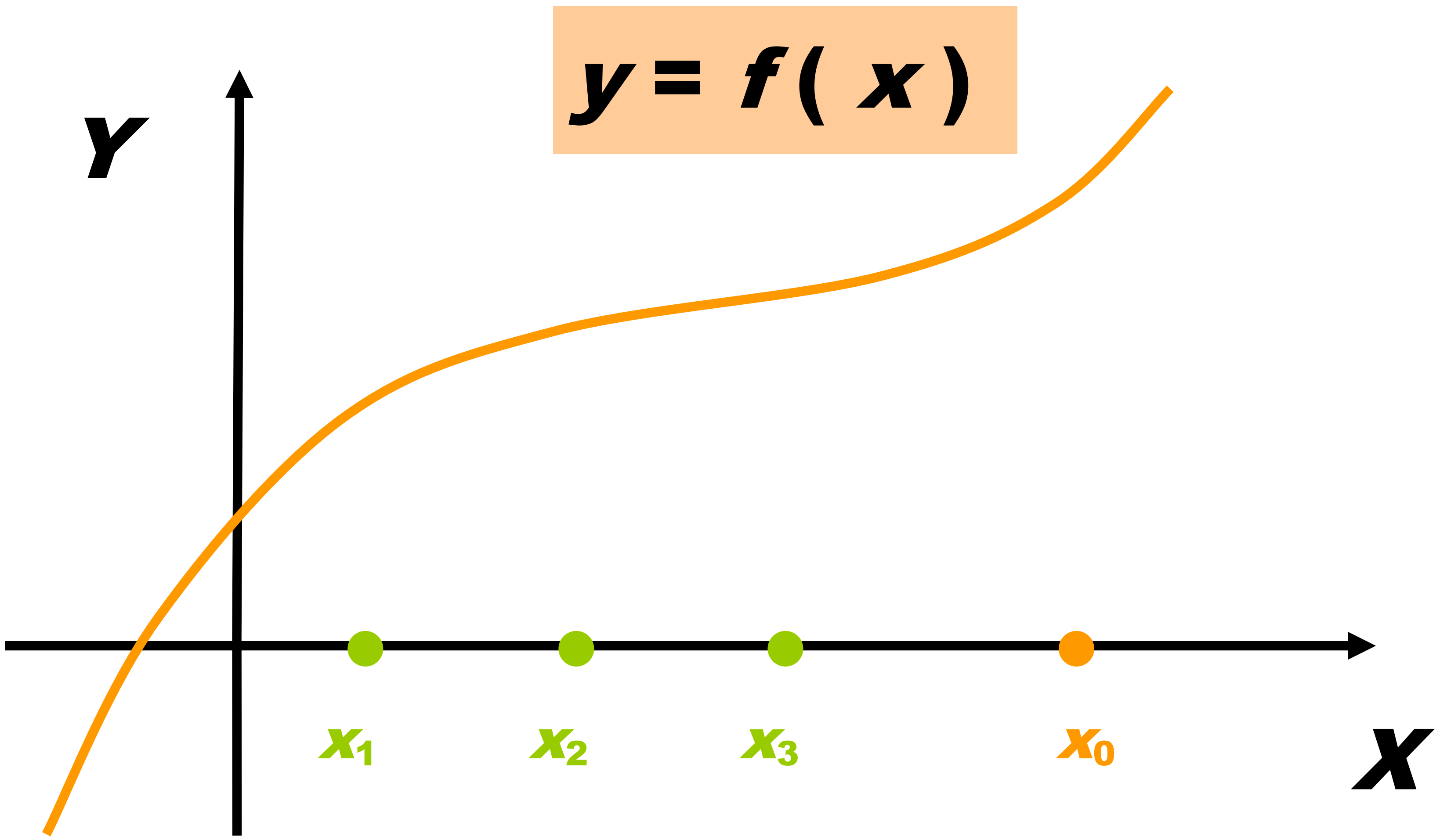
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



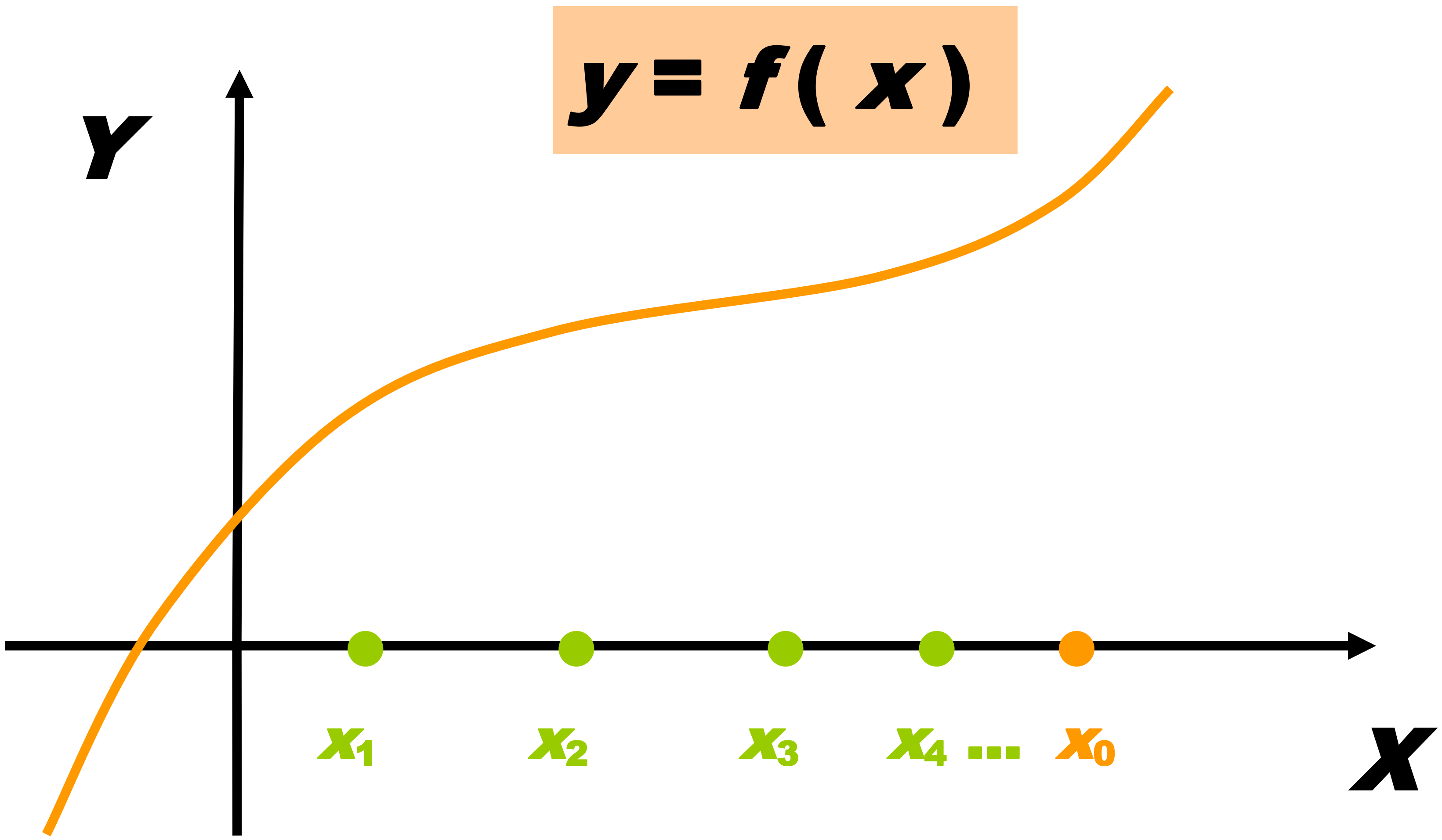
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



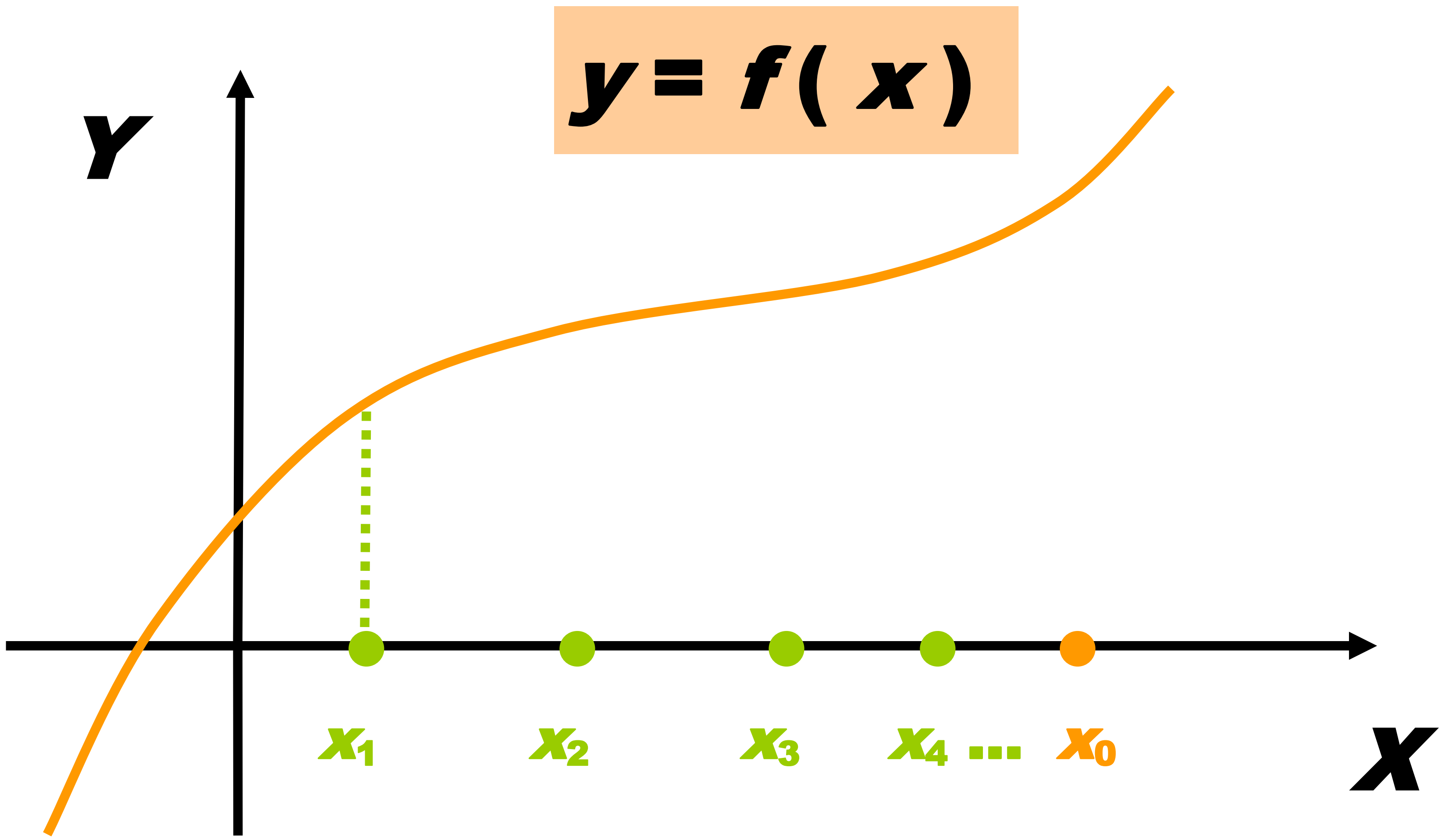
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



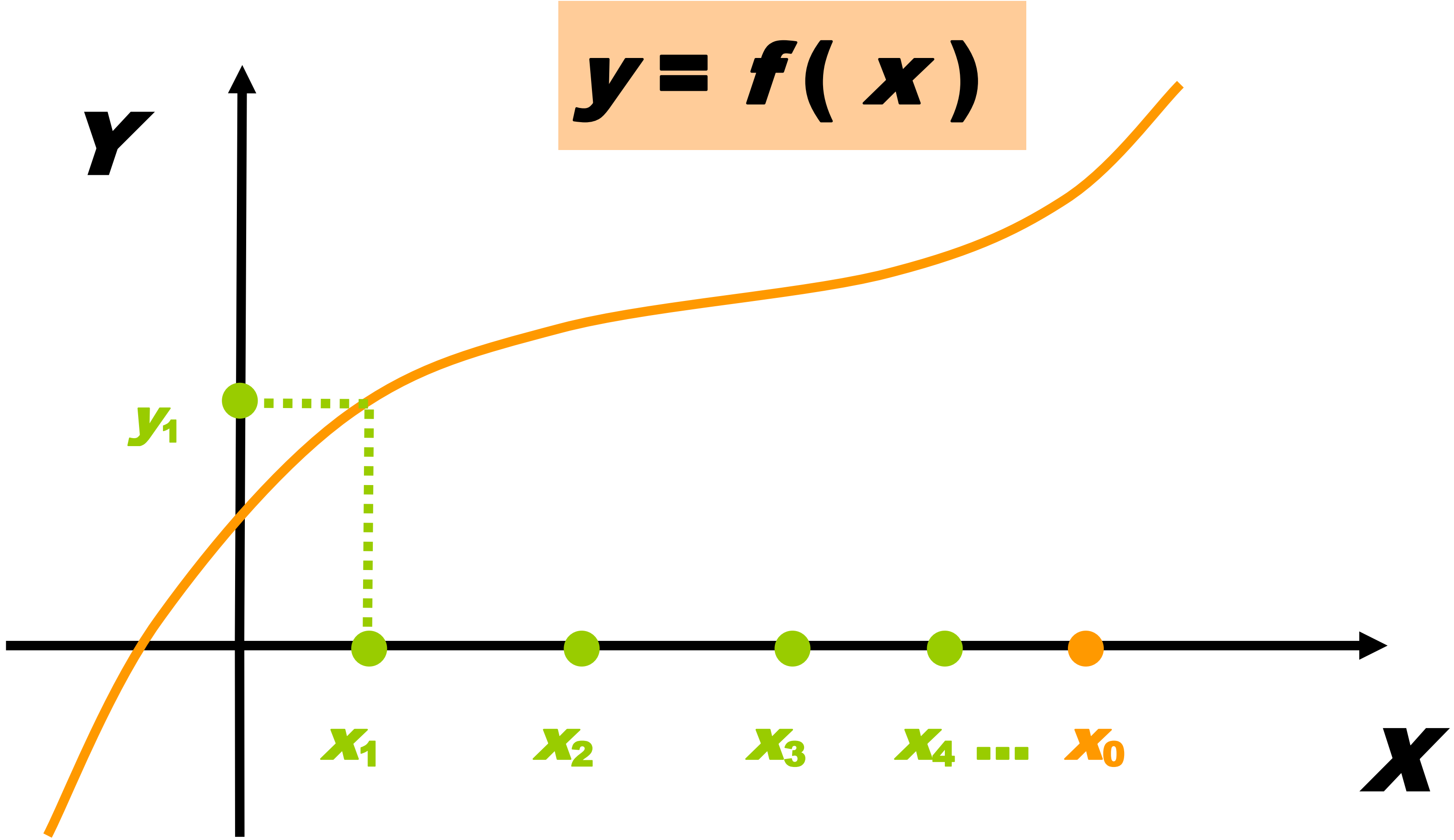
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



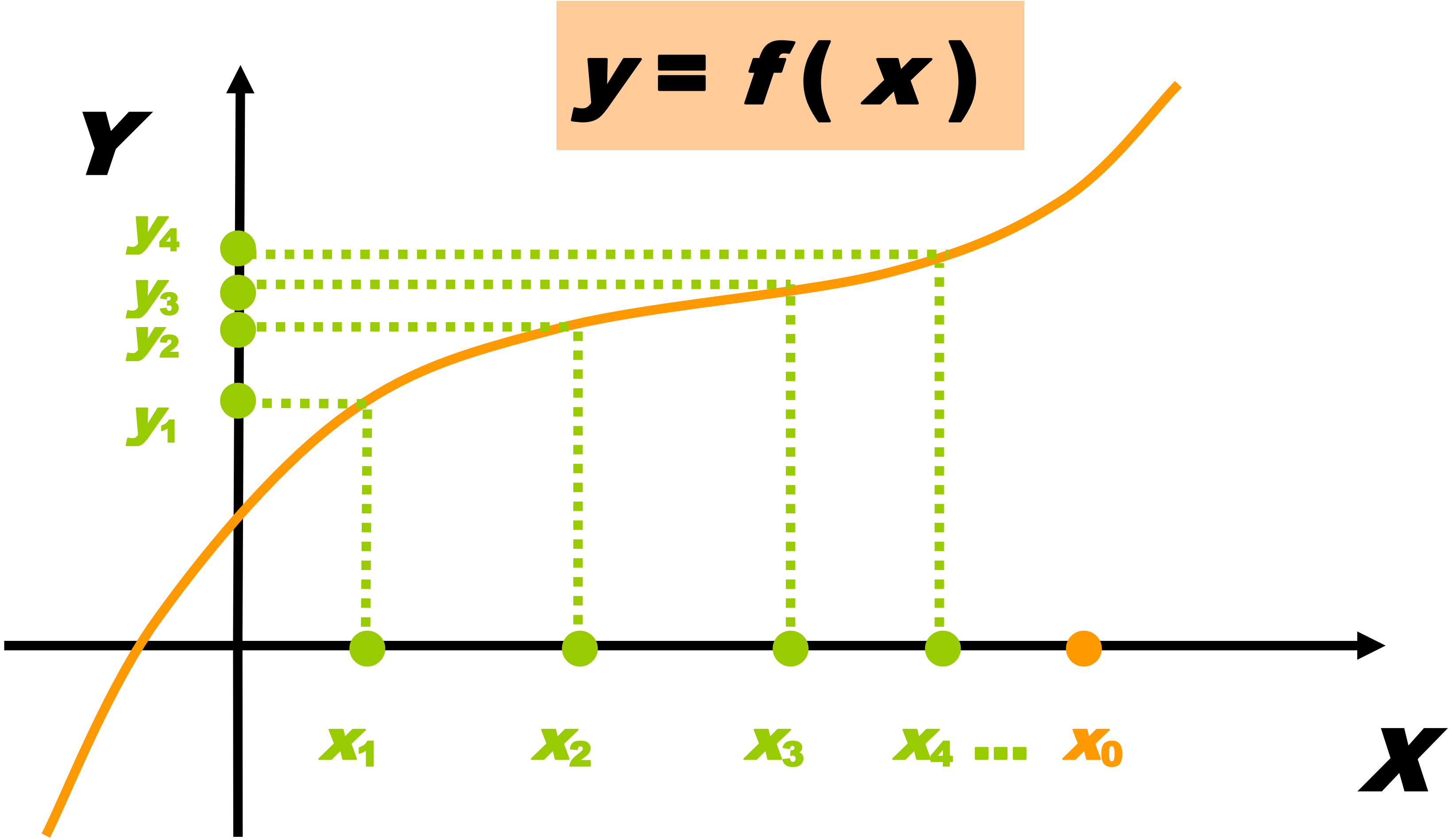
# Granica funkcji w punkcie $x_0$



# Granica funkcji w punkcie $x_0$



# Granica funkcji w punkcie $x_0$



# Granica funkcji w punkcie $x_0$

**Dla ciągu argumentów $(x_n)$ dążącego do $x_0$**

$$x_n \to x_0$$

**rozpatrujemy ciąg wartości**

**$(y_n)$ lub inaczej $(f(x_n))$.**

**Jaka jest granica ciągu wartości**

$$y_n \to ?$$

$$f(x_n) \to ?$$

$$\lim_{x_n \to x_0} f\left(x_n\right) = ?$$

# *Definicja granicy funkcji w punkcie

**Niech $f: D \to R$, $x_0$ – ustalony punkt,**

**$\left(x_0 \in D \text{ lub } x_0 \notin D\right)$, $(x_n)$ – dowolny ciąg**

**spełniający warunki:**

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$
2. $x_n \in D \quad i \quad x_n \neq x_0$ **dla każdego** $n \in N^+$

**Jeżeli istnieje granica ciągu wartości funkcji $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$ niezależna od wyboru ciągu $(x_n)$, to nazywamy ją granicą funkcji $f$ w punkcie $x_0$ i piszemy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$**

# * Granica funkcji w punkcie

**Jeśli**

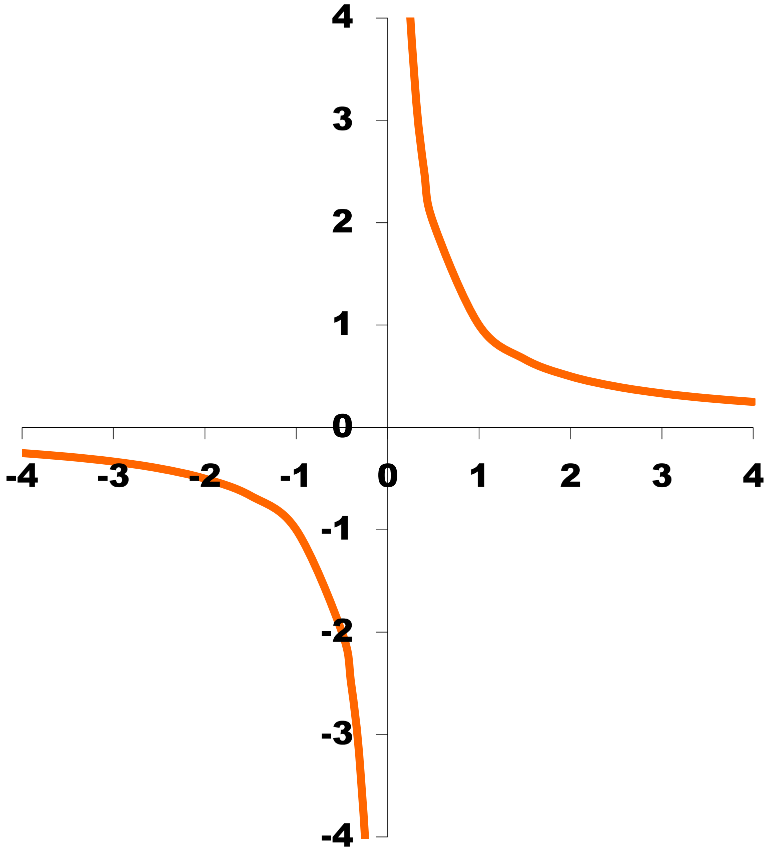
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

**mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ granicę niewłaściwą.**

**Uwaga.** **$x_0$ może oznaczać** $\pm\infty$

# Przykład

**Dany jest wzór funkcji** $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$




$D_f = R - \{0\}$

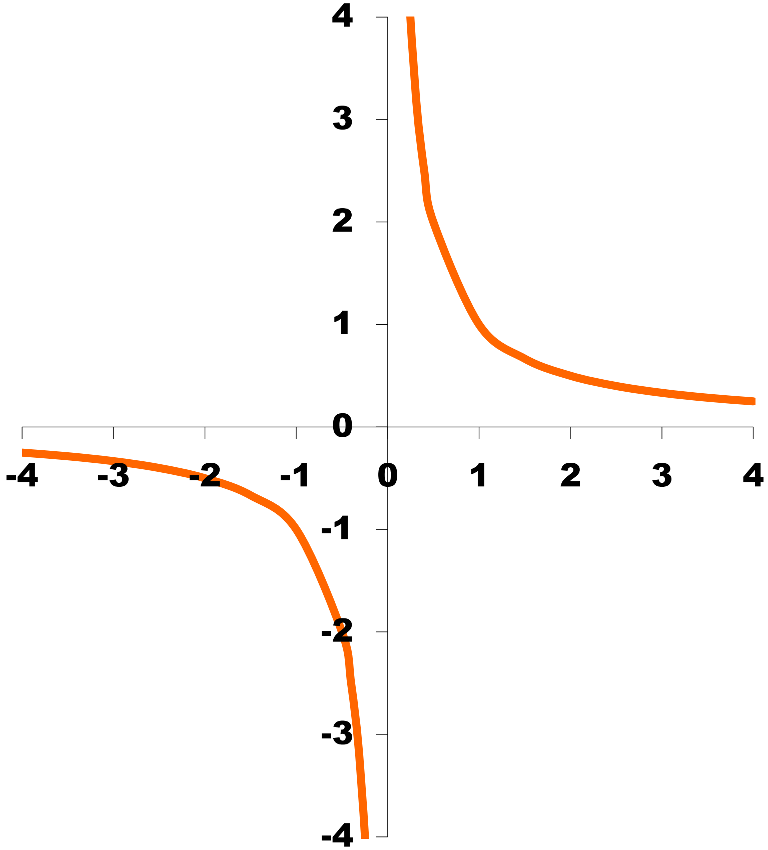
**zbiór wartości** $R - \{0\}$

**brak miejsc zerowych**

**granice widoczne na wykresie**

# Przykład cd.

**Dany jest wzór funkcji** $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$



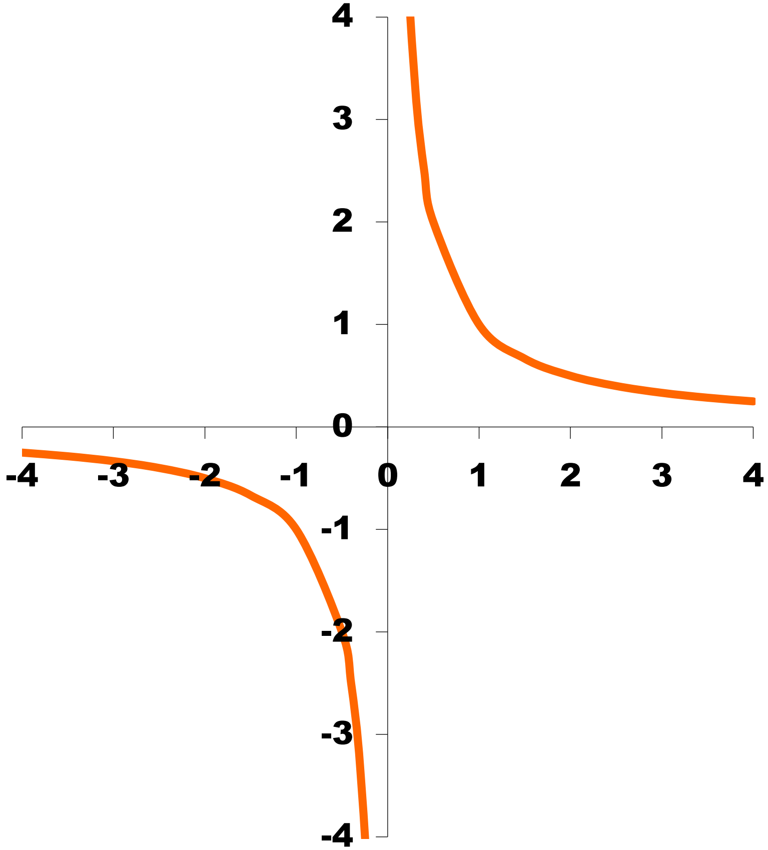

**granice widoczne na wykresie:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

# Przykład cd.

**Dany jest wzór funkcji** $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$




**granice widoczne na wykresie:**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

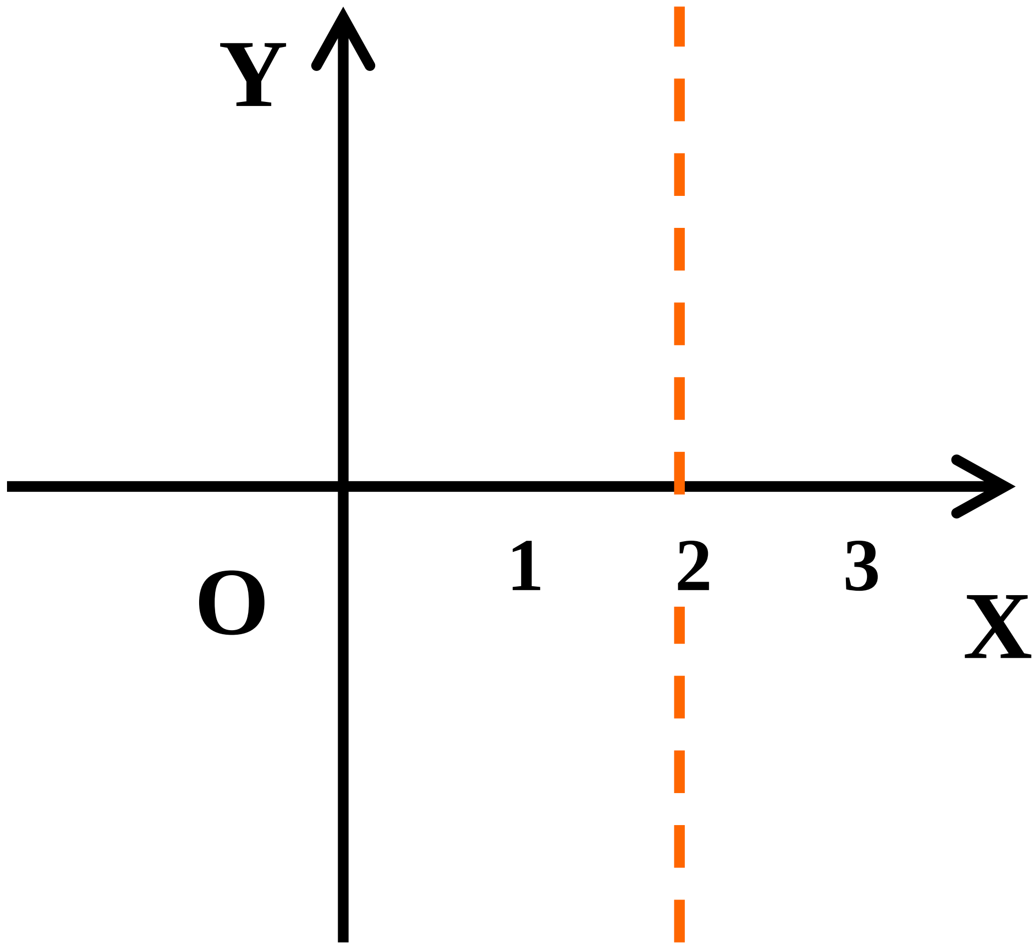
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

# Asymptoty funkcji

# Asymptota pionowa - idea

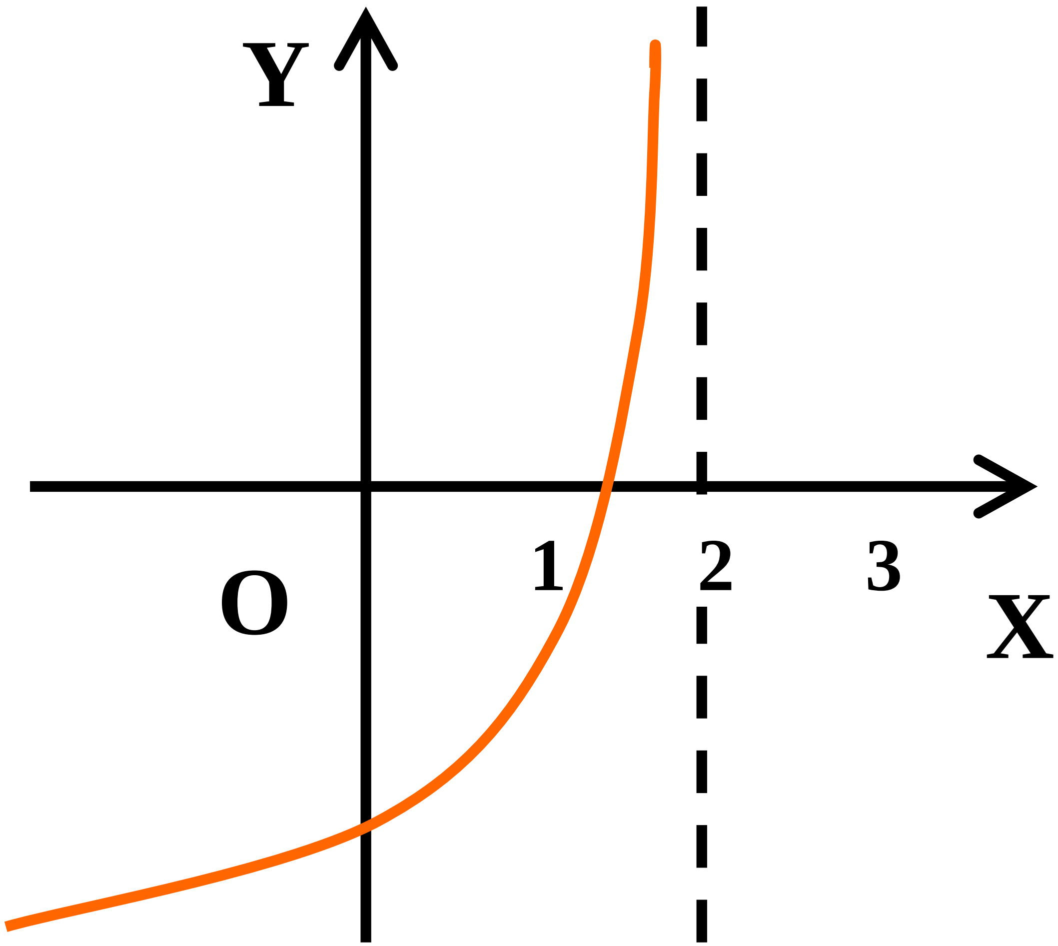
równanie prostej

$x = 2$



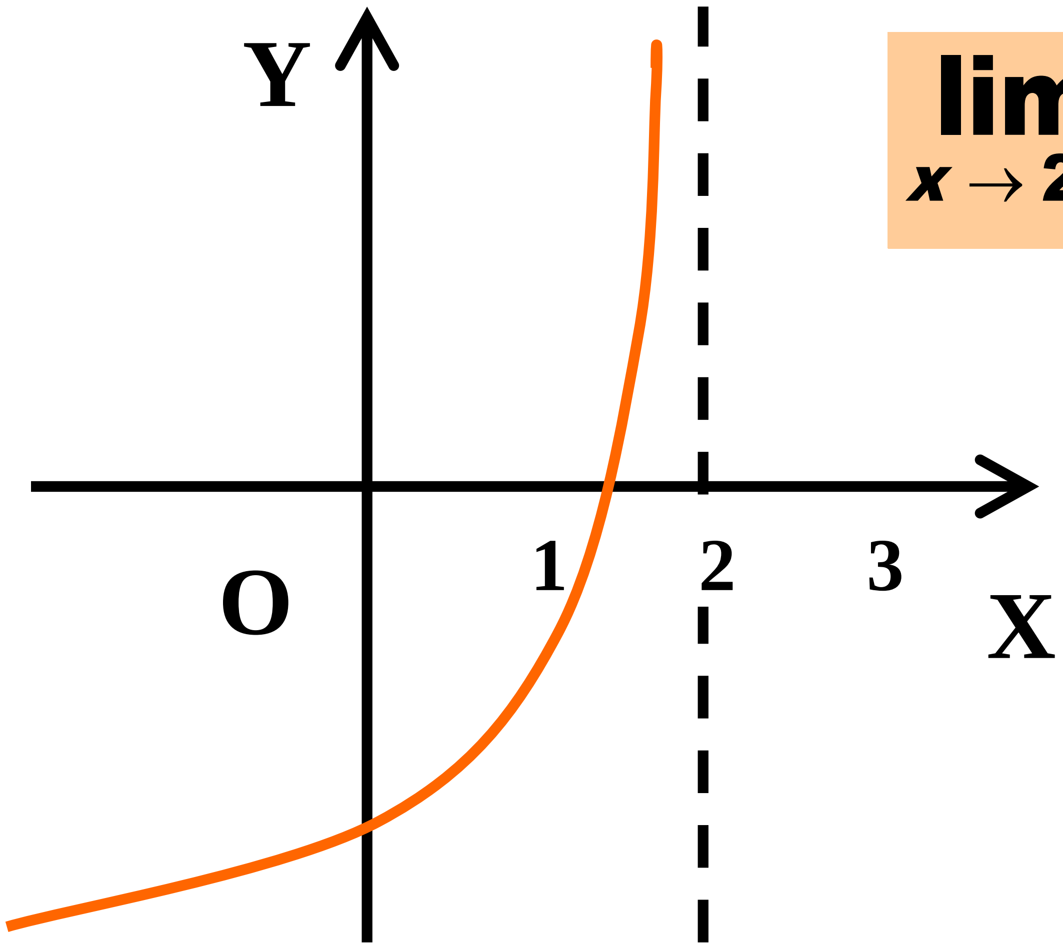
# Asymptota pionowa

$$x = 2$$



# Asymptota pionowa

$$x = 2$$



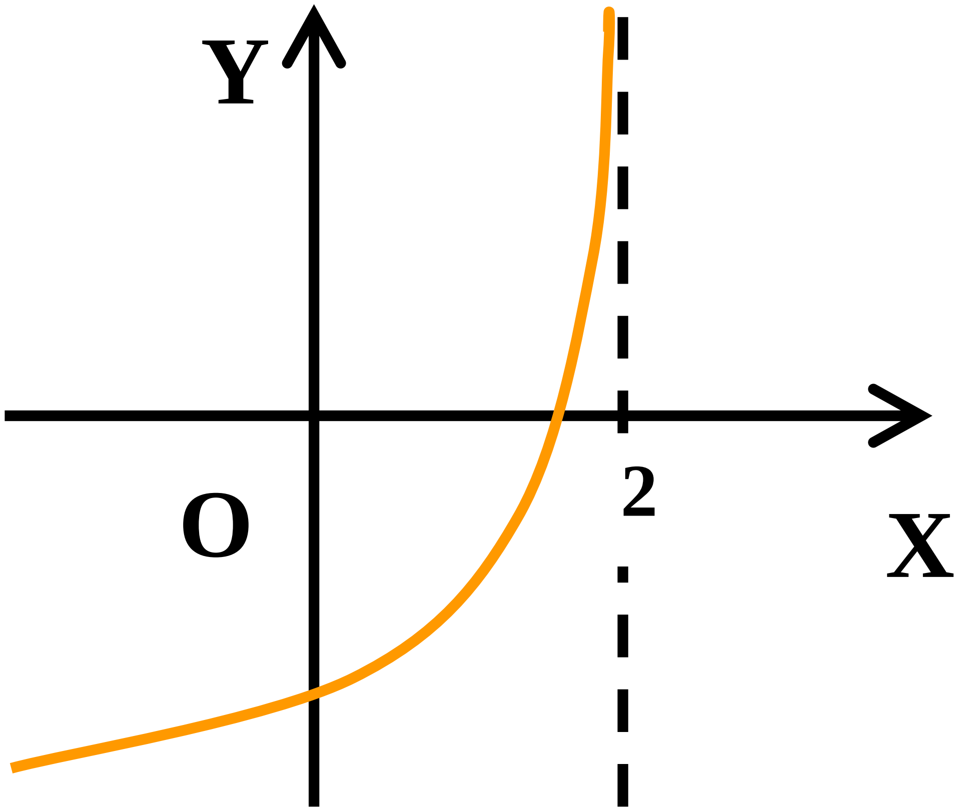

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

# Asymptota pionowa

**Rys. 1**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

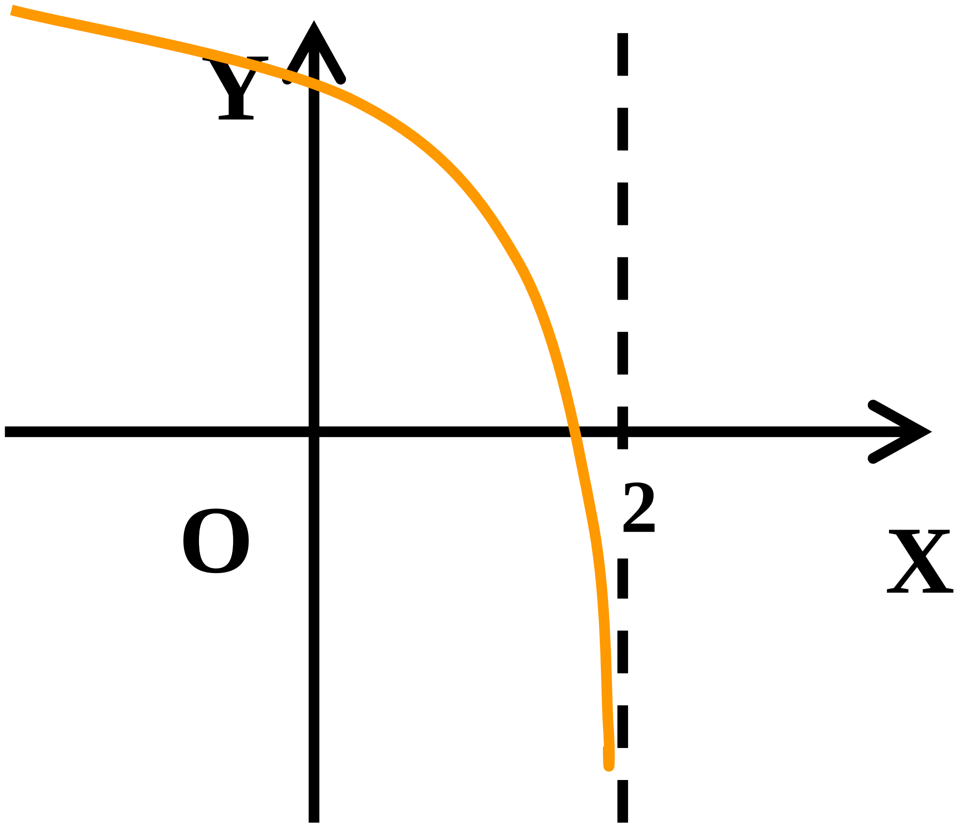
$$x = 2$$




**Rys. 2**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x = 2$$

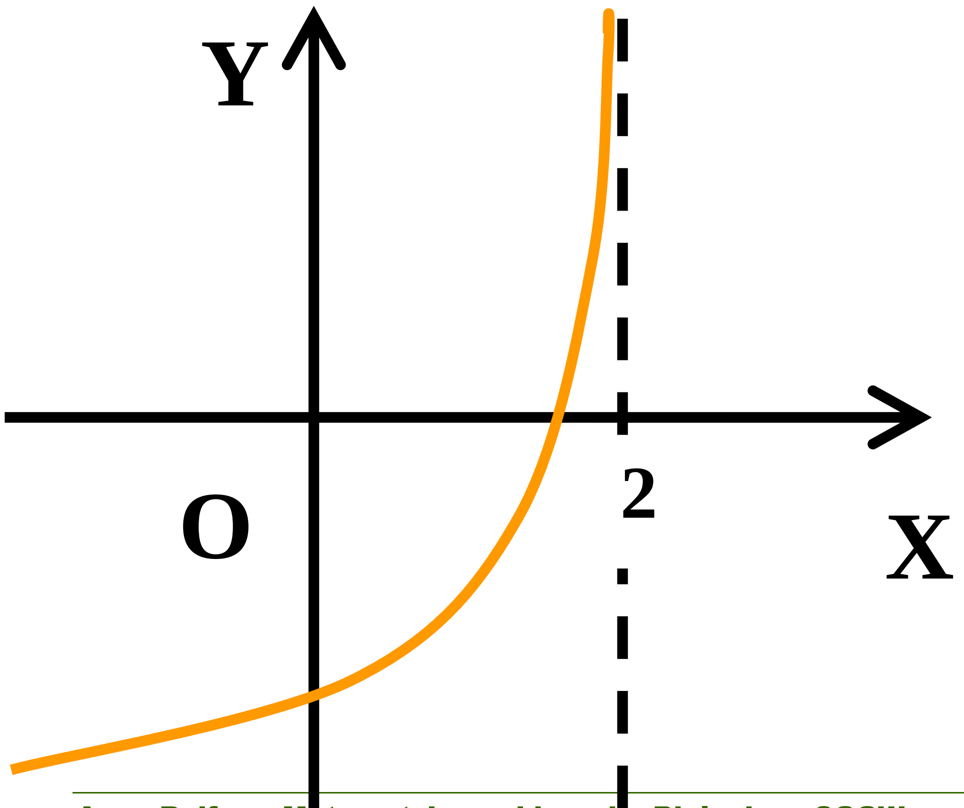


# Prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji $y = f(x)$

**Rys. 1**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

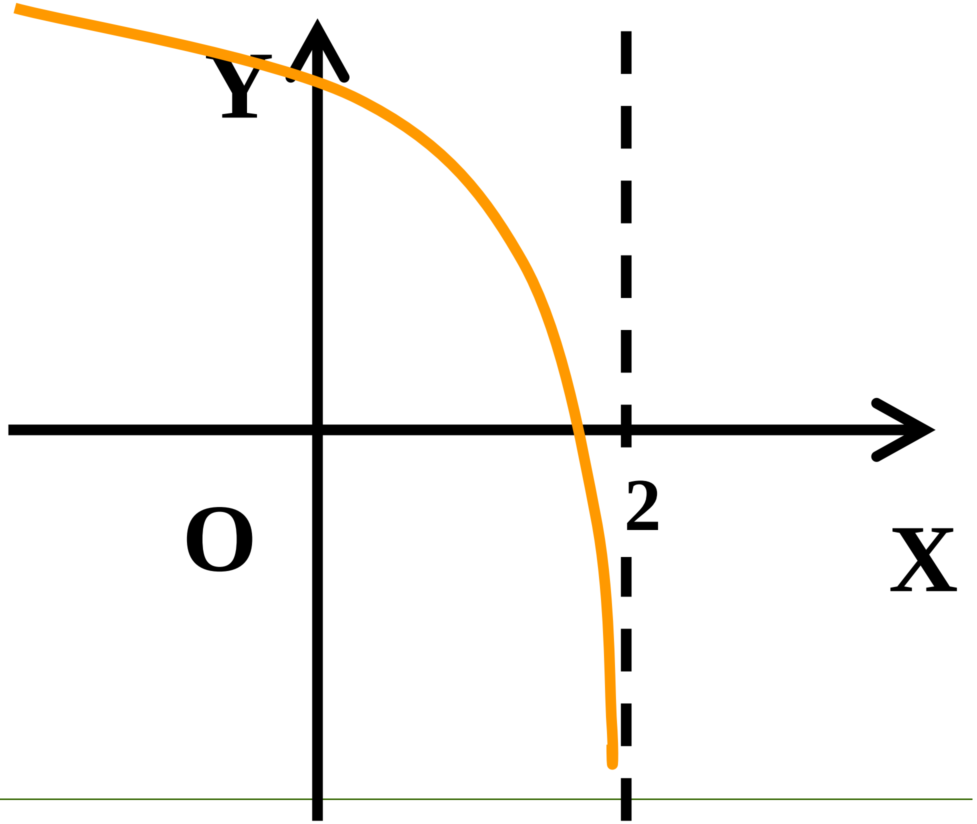
$x = 2$




**Rys. 2**

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

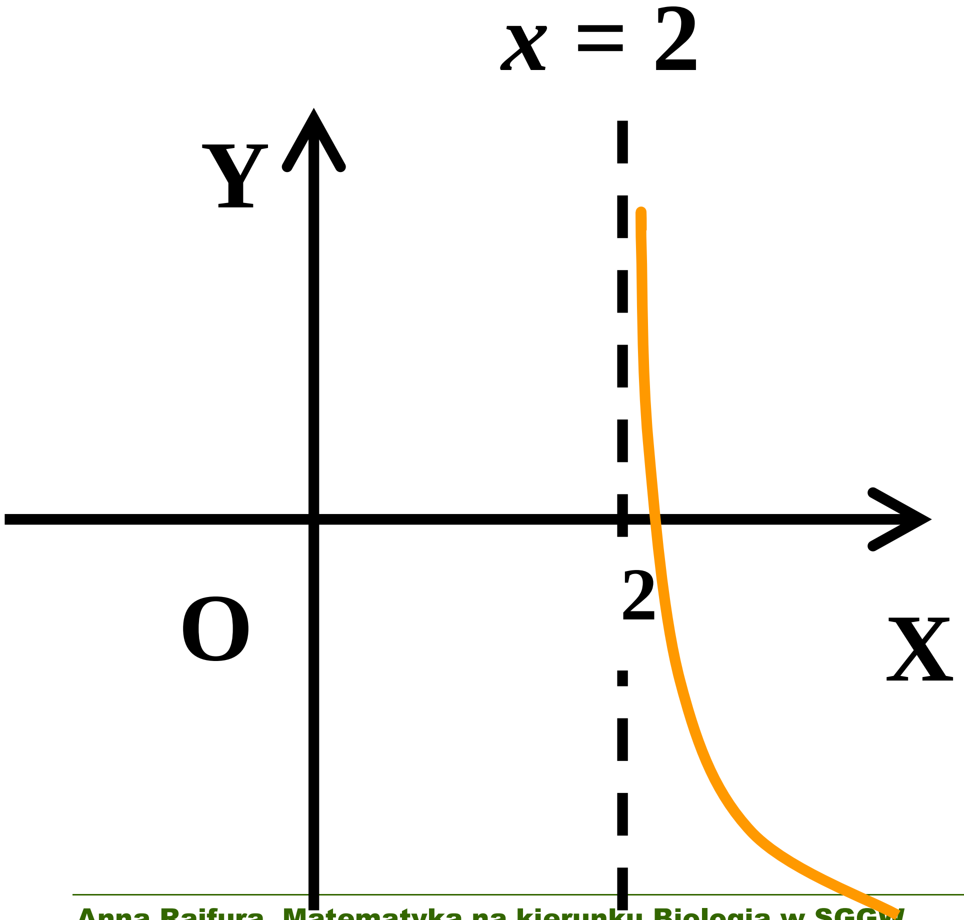
$x = 2$



**Prosta o równaniu $x$ = 2 jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $y = f(x)$**

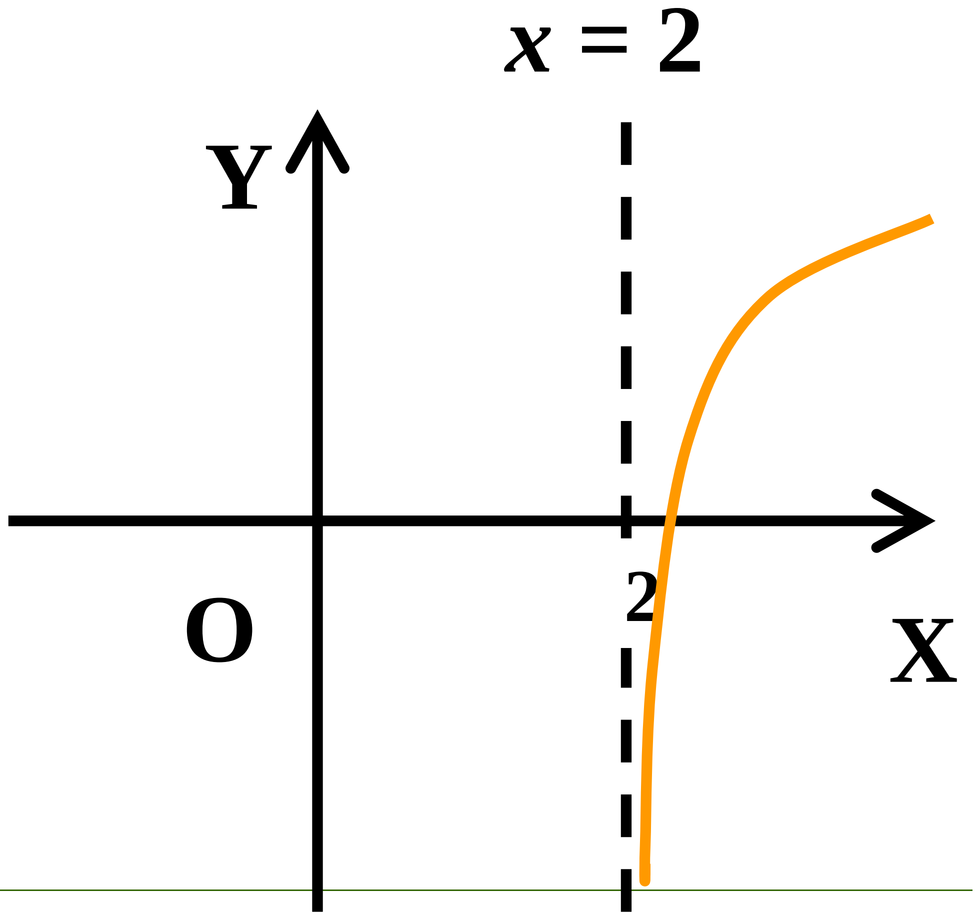
**Rys. 3**

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$



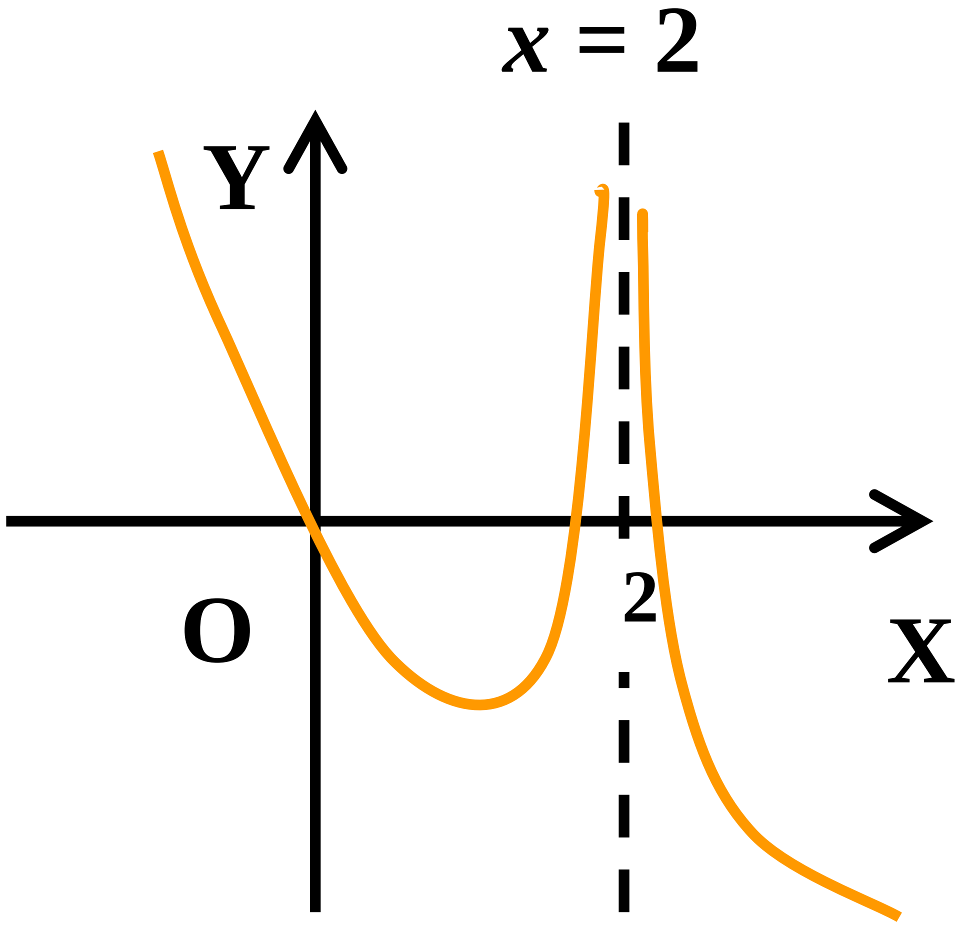

**Rys. 4**

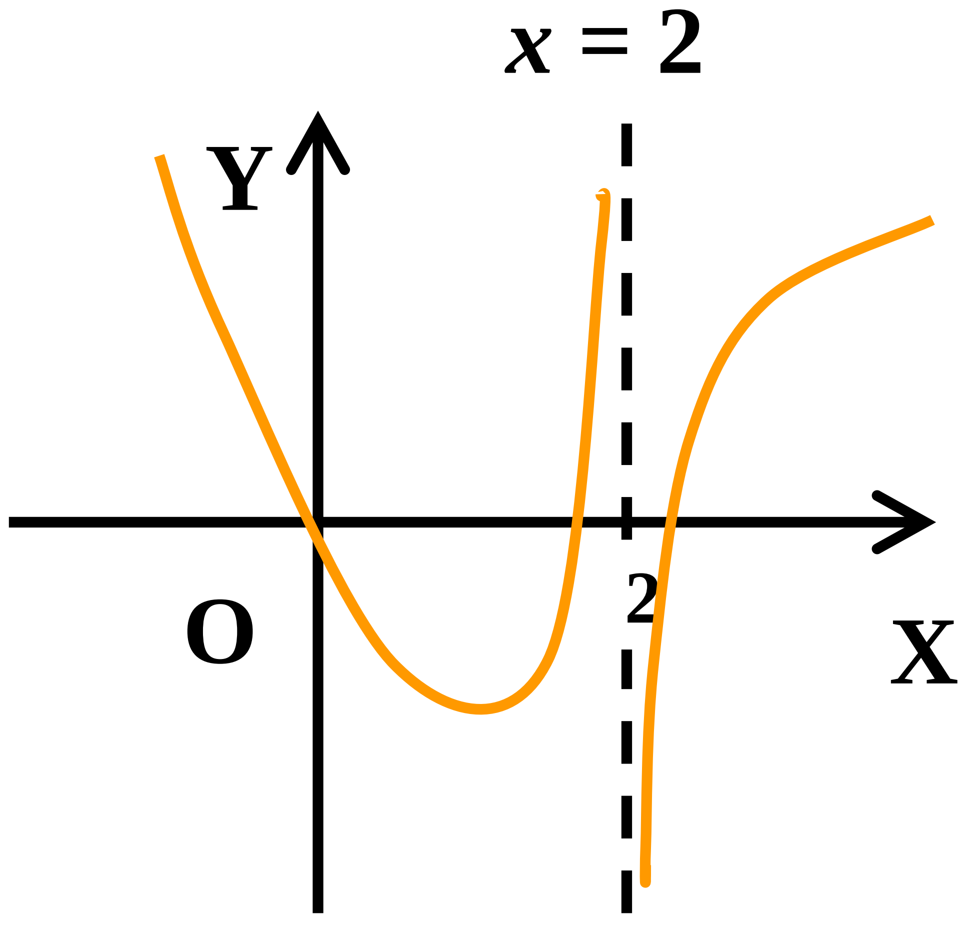
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$



## Prosta o równaniu *x* = 2 jest asymptotą pionową obustronną funkcji *y* = *f* (*x*)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \pm\infty \quad oraz \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \pm\infty$$



# Definicje asymptot pionowych

**Def. 1.** Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą **pionową lewostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

**Def. 2.** Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą **pionową prawostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

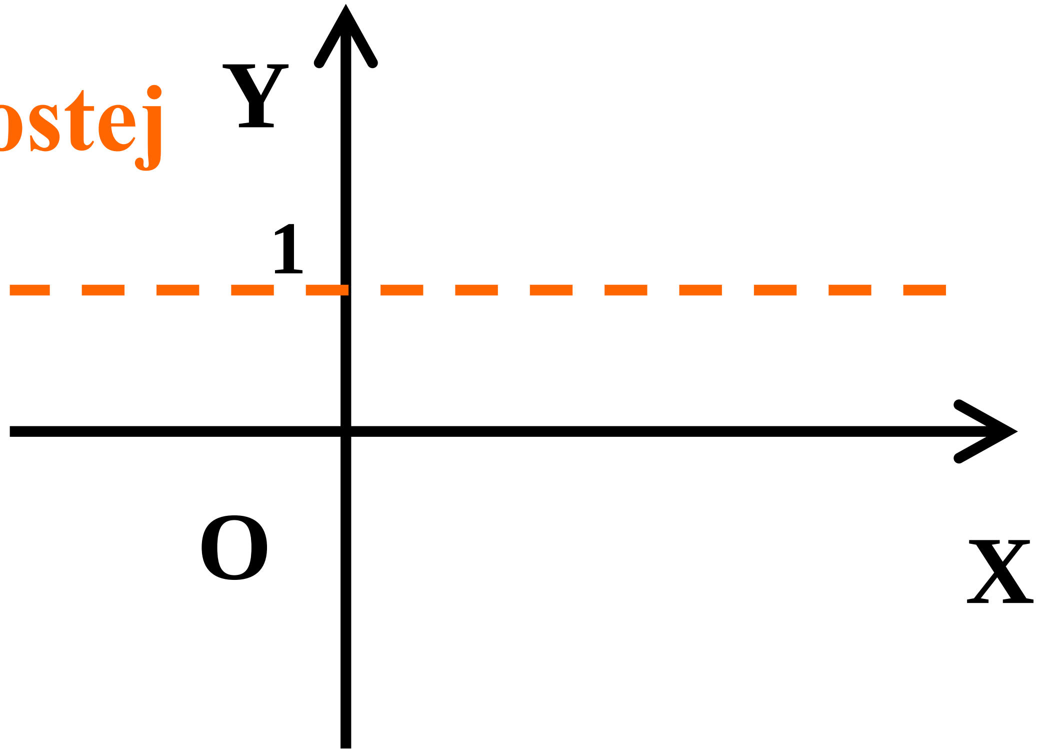
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

**Def. 3.** Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą **pionową obustronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

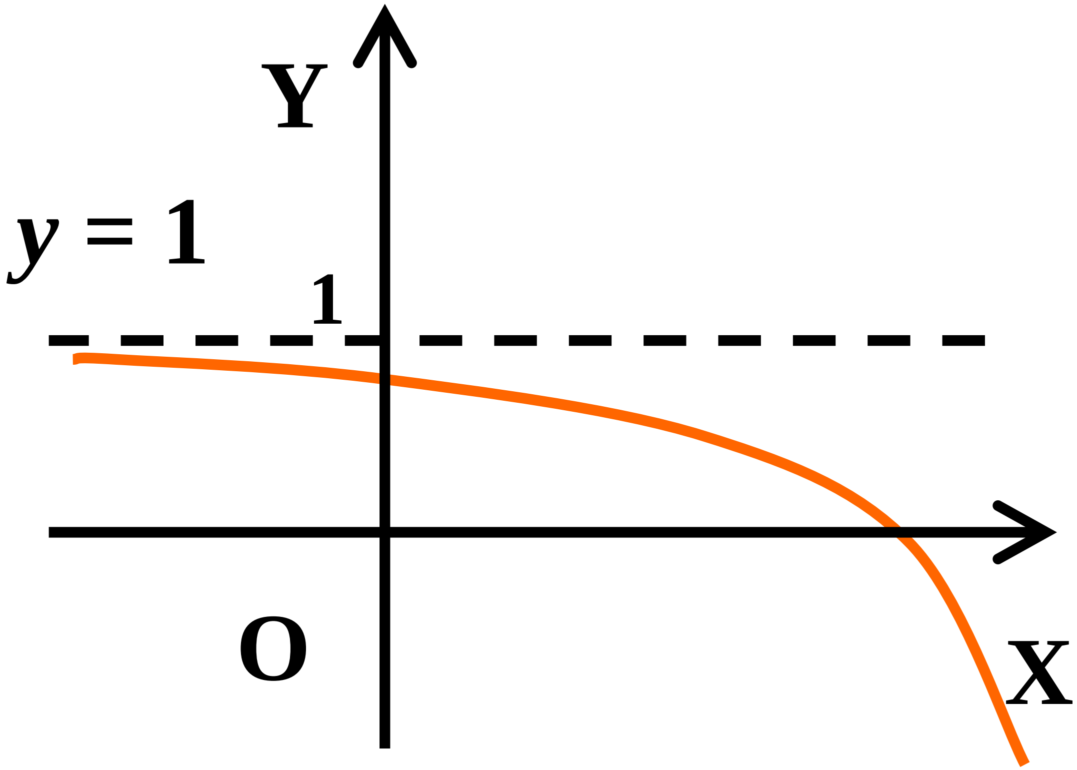
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

# Asymptota pozioma

równanie prostej
$y = 1$

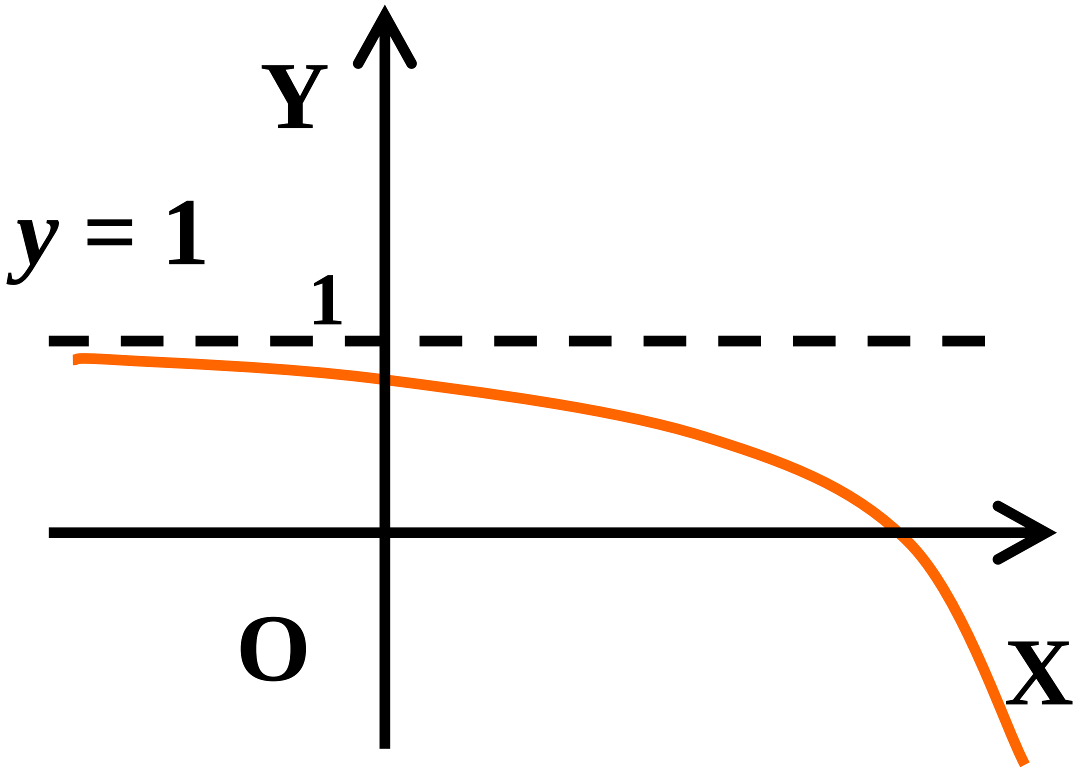


# Asymptota pozioma



# Asymptota pozioma

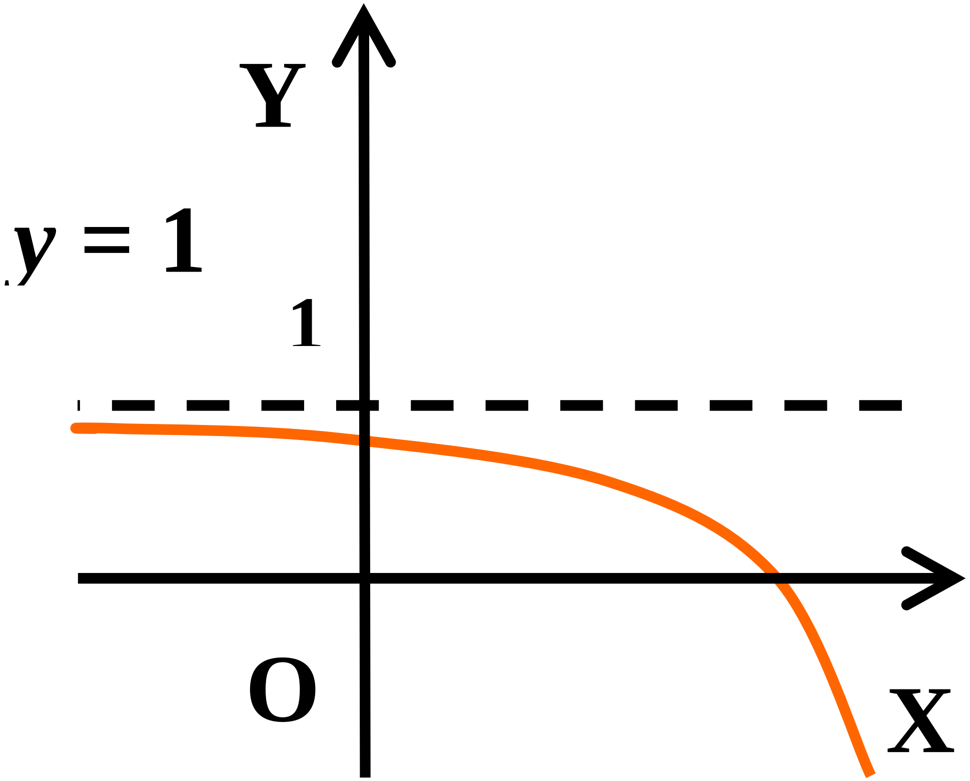
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



# Asymptota pozioma

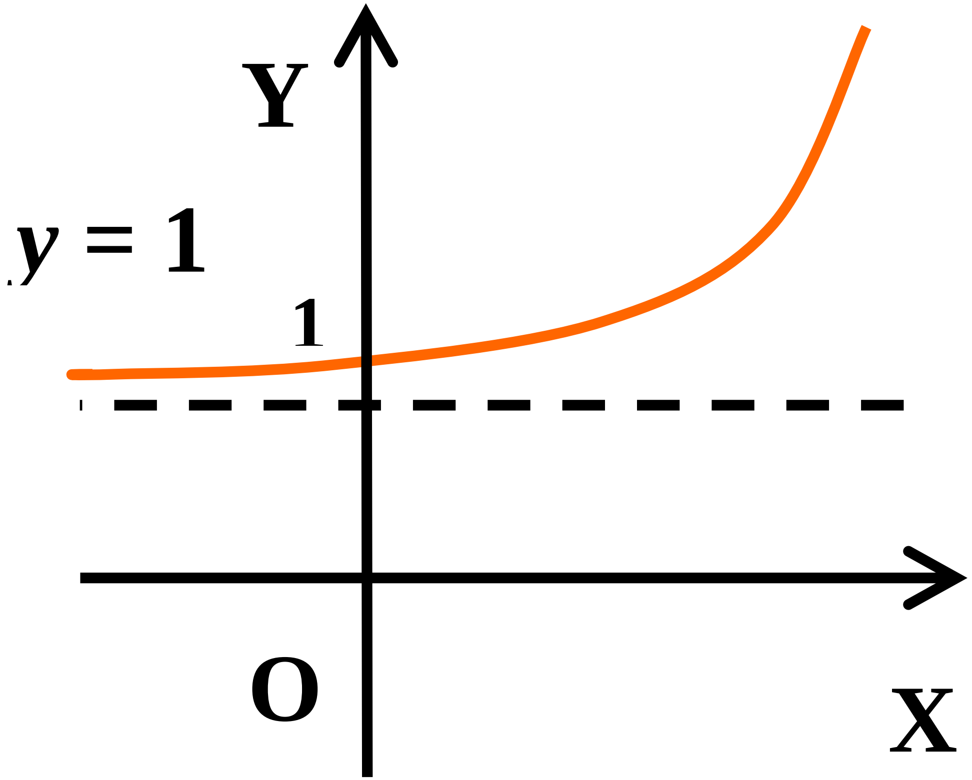
**Rys. 5**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$




**Rys. 6**

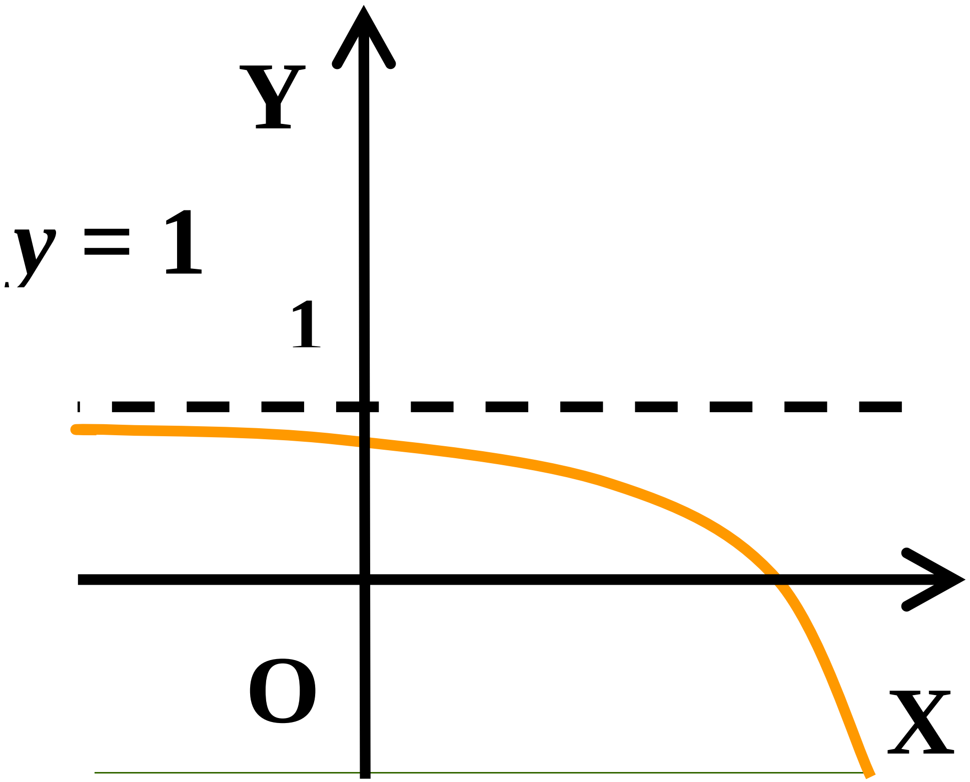
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



## Prosta o równaniu *y* = 1 jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji *y* = *f* (*x*)

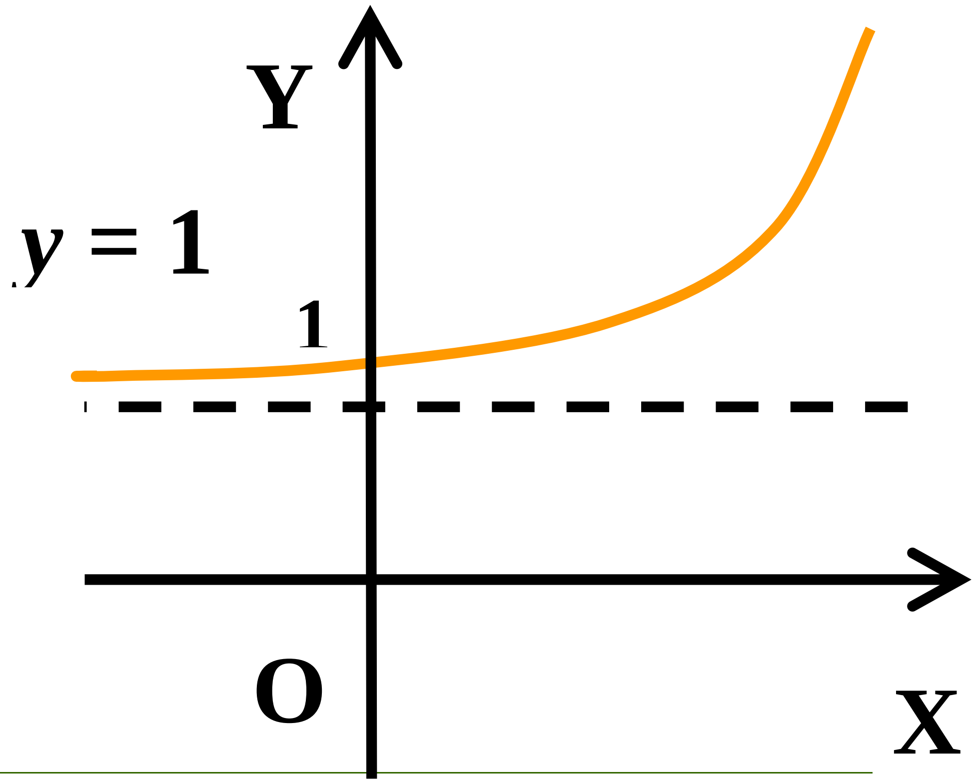
**Rys. 5**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$




**Rys. 6**

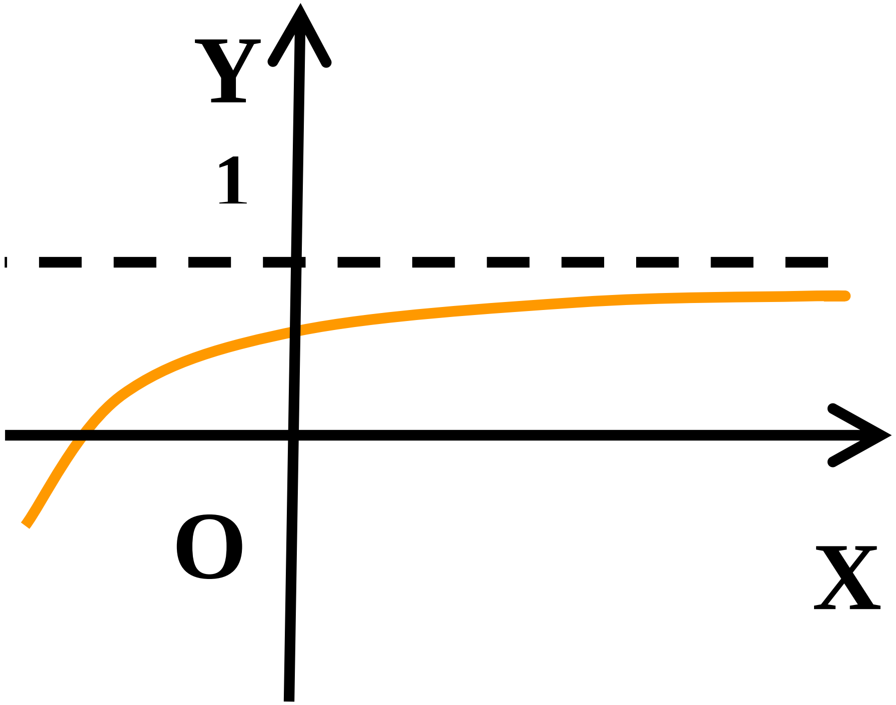
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



## Prosta o równaniu $y = 1$ jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji $y = f(x)$

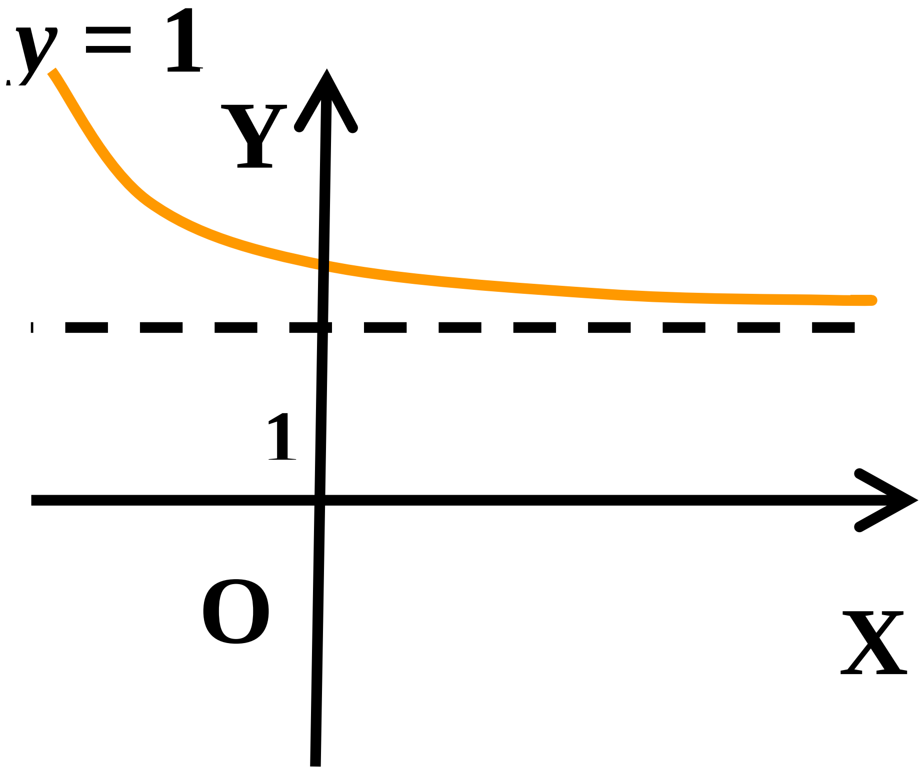
**Rys. 7**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$



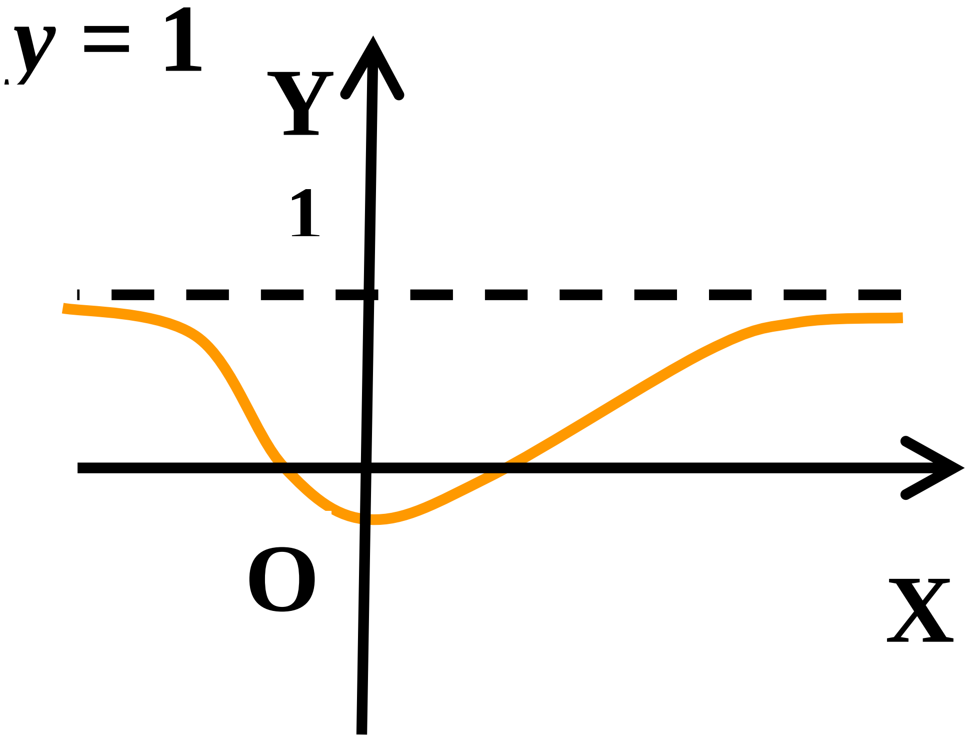

**Rys. 8**

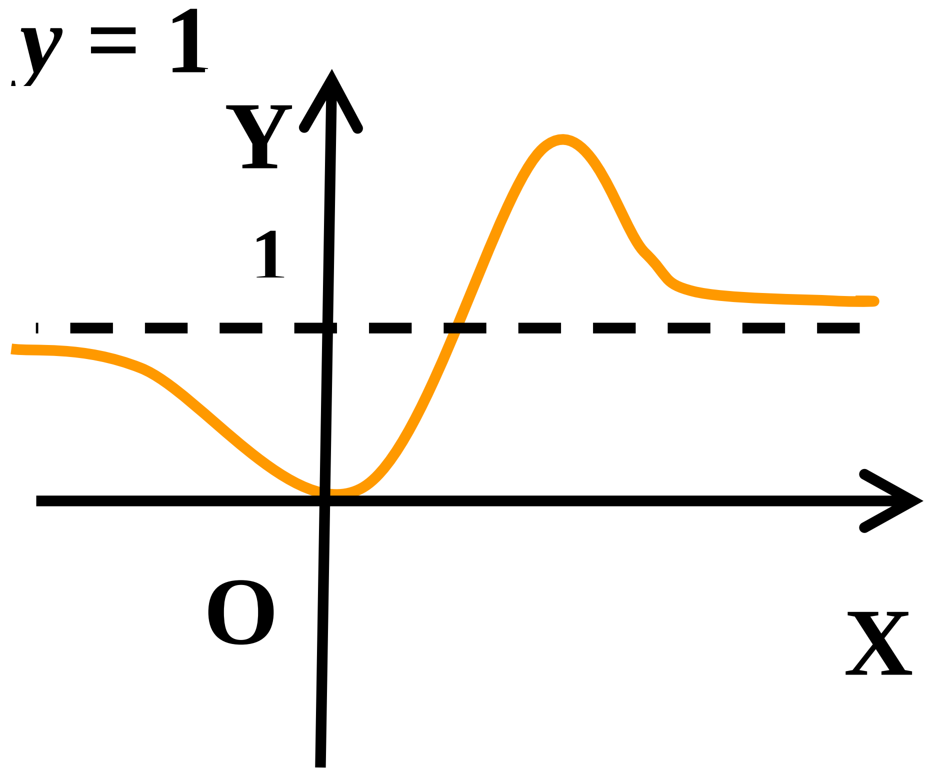
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$



## Prosta o równaniu $y = 1$ jest asymptotą poziomą obustronną funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$



# Definicje asymptot poziomych

**Def. 1**. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą prawostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

**Def. 2**. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą lewostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

**Def. 3**. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą obustronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad i \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$