Temat wykładu:

Macierz. Wyznacznik macierzy. Układ równań liniowych

<u>Kody kolorów:</u>

żółty – nowe pojęcie
pomarańczowy – uwaga
kursywa – komentarz
**** – materiał nadobowiązkowy***

Zagadnienia

1. **Pojęcia**
2. **Działania na macierzach**
3. **Wyznacznik macierzy**
4. **Macierzowy zapis ukladu równań liniowych**
5. **Układ Cramera. Wzory Cramera**

Pojęcie macierzy

Macierz to prostokątna tablica, w której można wyróżnić wiersze i kolumny.

<u>Przykład zapisu macierzy</u>:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

2 wiersze

3 kolumny

Macierze zapisuje się w nawiasach kwadratowych.

Pojęcie macierzy cd.

Na przecięciu wiersza i kolumny zapisany jest element macierzy.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \boxed{0{,}5} \end{bmatrix}$$

Elementami macierzy mogą być np.: liczby, funkcje, inne macierze.
Na <u>każdym</u> przecięciu wiersza i kolumny zapisany jest pewien element macierzy.

Wymiar macierzy

Jeśli macierz ma *m* wierszy i *n* kolumn, to mówimy, że jest wymiaru *m* x *n* (*czyt.*: *m* na *n*).

<u>Przykład</u>:

4 wiersze, 2 kolumny

wymiar macierzy: 4 x 2
(*czyt.*: *cztery na dwa*)

$$\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 3 \\ -0{,}3 & \pi \\ 4{,}5 & -5{,}2 \end{bmatrix}$$

4 x 2

Przykład

Zapisz wymiary danych macierzy.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 x 2

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1{,}7 \\ 13 \\ 2{,}5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5 x 1 (wektor kolumnowy)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0{,}2 & -3 \end{bmatrix}$$

1 x 4 (wektor wierszowy)

$$\begin{bmatrix} -11 \end{bmatrix}$$

1 x 1

Oznaczenia macierzy

Macierze oznacza się dużymi literami:

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots \text{ lub } \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots$$

lub

$$[a_{ij}], \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Identyfikowanie elementów macierzy

A – macierz wymiaru m x n,

a_{ij} – element macierzy A leżący na

przecięciu i-tego wiersza z j-tą kolumną,

gdzie $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

$$a_{ij}$$

numer wiersza **numer kolumny**

Przyklad 1

Dana jest macierz *A*. Zapisz każdy element a_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przyklad 1, cd.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = -1$

$a_{21} = 2$

$a_{11} = 3$

$a_{22} = 1$

$a_{31} = 0$

$a_{32} = 1$

Przyklad 2

Dane są elementy macierzy *B*. Zapisz macierz.

$b_{11} = 2$, $b_{12} = -3$, $b_{13} = 4$, $b_{14} = -1$,

$b_{21} = 1$, $b_{22} = 5$, $b_{23} = -7$, $b_{24} = 0$

Przyklad 2, cd.

$b_{11} = 2$, $b_{12} = -3$, $b_{13} = 4$, $b_{14} = -1$,

$b_{21} = 1$, $b_{22} = 5$, $b_{23} = -7$, $b_{24} = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Wybrane postacie macierzy

Jeśli w macierzy $A_{m \times n}$ liczba wierszy m jest równa liczbie kolumn n, to macierz A nazywamy kwadratową stopnia n;

ozn.: A_n

Przykłady macierzy kwadratowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

stopnia 2 **stopnia 3**

Przykład

Zapisz macierz kwadratową A_n w postaci ogólnej.

Zapis macierzy A_n na tablicy.

Przekątna macierzy kwadratowej

W macierzy kwadratowej stopnia *n* elementy a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ tworzą główną przekątną.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przekątna (główna) macierzy A_n

Postacie macierzy kwadratowych cd.

Macierz jednostkowa stopnia n, *ozn.* I_n:

macierz z jedynkami na przekątnej głównej oraz zerami poza przekątną.

$$a_{ii} = 1 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykłady na tablicy.

Równość macierzy

Macierze $A_{m \times n}$ oraz $B_{p \times q}$ są równe, gdy ich wymiary są jednakowe oraz odpowiadające elementy są równe, czyli $m = p$ i $n = q$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Przykład

Dane są macierze *A*, *B*, *C*, *D*. Podaj warunki, przy których zachodzą równości: *A* = *B*, *C* = *D*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & -1 & y \\ 0 & z & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

- Dodawanie, odejmowanie
- Mnożenie macierzy przez liczbę
- Transponowanie
- Mnożenie macierzy przez macierz

Przykłady na tablicy.

Dodawanie macierzy

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

Odejmowanie macierzy

$$A_{m \times n} - B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

$$i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k \cdot A_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

krótszy zapis:

$$k \cdot [a_{ij}] = [k \cdot a_{ij}]$$

$$i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

Transponowanie macierzy

$$(A_{m \times n})^T = C_{n \times m}$$

$$c_{ij} = a^T_{ij} = a_{ji} \qquad i = 1, \ldots, n, \ \ j = 1, \ldots, m$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}]^T = [\, a^T_{ji}]$$

$$i = 1, \ldots, m, \ \ j = 1, \ldots, n$$

Mnożenie macierzy przez macierz

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\qquad i=1,\ldots,m,\ \ j=1,\ldots,p$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}]\cdot[b_{ij}]=\left[\ \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}\ \right]$$

$$i=1,\ldots,m,\ \ j=1,\ldots,p$$

Własność macierzy *I*

Dla dowolnej macierzy $A_{m \times n}$ zachodzą równości:

$$A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$$

$$I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$$

Zatem macierz *I* jest elementem obojętnym mnożenia macierzy.

Przykłady na tablicy.

Kolejność działań

- **Mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem**
- **Transponowanie przed innymi działaniami**
- **Najpierw działania w nawiasach**

Przykład na tablicy.

Prawa działań na macierzach

Ozn.: A, B, C, D – macierze, k – liczba rzeczywista.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A + B = B + A$$

***Uwaga*. Mnożenie macierzy nie jest przemienne.**

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

Prawa działań na macierzach, cd.

$$\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$$

Zadania

Zadania w pliku

Zadania_macierze_dzialania.pdf

<u>Uwaga</u>

Do działań na macierzach można wykorzystać funkcje arkusza kalkulacyjnego (np. CALC, EXCEL):

- **MACIERZ.ILOCZYN**
- **TRANSPONUJ**

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy kwadratowej A_n

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej *A* jest pewna liczba jednoznacznie przyporządkowana tej macierzy;

ozn.: *det A* (*ang*. determinant), |A|.

Liczbę tą definiuje się podając metodę jej obliczenia dla macierzy kwadratowej stopnia *n*, przy *n* = 1, 2, ...

Obliczanie wyznacznika – metoda Laplace'a

Dla n = 1, 2, ... wyznacznik macierzy A_n oblicza się metodą Laplace'a rozwijania wyznacznika względem wiersza lub kolumny macierzy A_n.

Dla n = 2 oraz n = 3 metodę Laplace'a można przedstawić w postaci uproszczonej.

Obliczanie *det* A_1

Dla n = 1:

$$det\,[a_{11}] = a_{11}$$

Przykłady:

$$det\,[-3] = -3$$

$$det\,[12] = 12$$

Obliczanie *det* A_2

Dla $n = 2$:

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Przykład:

$$det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot 3 = 8 - 6 = 2$$

Obliczanie *det* A_3 - schemat Sarrusa

Dla n = 3 wyznacznik można obliczyć stosując schemat Sarrusa:

1. Pod trzecim wierszem przepisać pierwszy wiersz, a pod nim drugi.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Obliczanie *det* A_3 - schemat Sarrusa cd.

$$
\begin{array}{c}
det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \\
\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}
\end{array}
$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

$$a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

2. Obliczyć iloczyny elementów na przekątnej głównej i dwóch przekątnych równoległych do niej; niech S_g oznacza sumę tych iloczynów.

suma S_g = ...

Obliczanie *det* A_3 - schemat Sarrusa cd.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$

$a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

suma $S_d = \ldots$

3. Obliczyć iloczyny elementów na drugiej przekątnej i dwóch przekątnych równoległych do niej; niech S_d oznacza sumę tych iloczynów.

Obliczanie *det* A_3 - schemat Sarrusa cd.

$$4. \qquad \det A = S_g - S_d$$

<u>Uwaga</u>

Zamiast dopisywać dwa pierwsze wiersze pod trzecim, można dopisać dwie pierwsze kolumny za trzecią lub wyznaczyć pewne „trójkąty” w macierzy. Wszystkie te graficzne sposoby służą ułatwieniu zapamiętania i stosowania podanego dalej wzoru.

Przykłady na tablicy.

Obliczanie *det* A_3

Wzór na *det* A_3:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = S_g - S_d\,,$$

gdzie:

$$S_g = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}$$

$$S_d = a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}$$

Oblicz wyznacznik danej macierzy.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 11 - (-6) = 17$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ -4 \\ + \quad -2 \\ \hline S_d = -6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ 3 \\ + \quad 8 \\ \hline S_g = 11 \end{array}$$

* Obliczanie wyznacznika macierzy A_n

Metoda Laplace'a rozwijania wyznacznika względem i-tego (dowolnego) wiersza macierzy A_n

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot det\, A_{i1} +$$

$$+ a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot det\, A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot det\, A_{in}$$

gdzie A_{ij} jest macierzą, która powstaje po wykreśleniu z macierzy A i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

* Przykład

Oblicz wyznacznik danej macierzy *A*. Polecenie można wykonać wybierając rozwinięcie względem np. drugiego wiersza.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

* Przykład

$$\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{bmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{bmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{bmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$+0\cdot(-1)^{2+4}\cdot\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{bmatrix} =$$

* Przykład

$$= 3\cdot(-1)^{2+1}\cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{=\,-\,33} + (-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{=\,3} +$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\cdot \underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}}_{=\,6} + 0 =$$

Wyznaczniki zakreślonych macierzy można policzyć wg schematu Sarrusa lub ogólną metodą Laplace'a.

$$= 3\cdot(-1)\cdot(-33) + (-1)\cdot 3\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot 6 = 90$$

Odp.: *det A* = 90.

* Własności wyznacznika

1. **Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej.**

2. **Jeżeli macierz kwadratowa ma w pewnym wierszu (lub kolumnie) same zera, to jej wyznacznik jest równy zeru.**

* Własności wyznacznika cd.

3. **Jeżeli dwa wiersze (lub kolumny) macierzy kwadratowej są proporcjonalne, to jej wyznacznik jest równy zeru.**

4. **Wyznacznik macierzy jednostkowej dowolnego stopnia jest równy jeden.**

$$\det I_n = 1$$

5. **Wyznaczniki macierzy A oraz A^T są równe.**

$$\det A = \det A^T$$

* Własności wyznacznika cd.

6. **Dla macierzy A stopnia n:**

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A, \quad k \in R$$

7. **Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia jest równy iloczynowi wyznaczników tych macierzy:**

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Macierz osobliwa, nieosobliwa

Macierz kwadratową A nazywamy osobliwą, gdy $\det A = 0$.

Macierz kwadratową A nazywamy nieosobliwą, gdy $\det A \neq 0$.

Zadania

Zadania w pliku

Zadania_macierze_wyznacznik.pdf

Uwaga

Do obliczania wyznacznika macierzy można wykorzystać funkcję arkusza kalkulacyjnego (np. CALC, EXCEL):

WYZNACZNIK.MACIERZY

Układ równań liniowych

Zagadnienia – Układy równań liniowych

1. **Zapis macierzowy układu równań**
2. **Układ Cramera**
3. **Wzory Cramera**

Wprowadzenie

Przykład 1.

Dla danych macierzy *A*, *x*, *b* wykonaj:

a) **oblicz iloczyn $A \cdot x$,**

b) **zapisz warunki, przy których zachodzi równanie $Ax = b$.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1. cd.

$$A_{3x4}\cdot x_{4x1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} (-1)\cdot x_1+0\cdot x_2+2\cdot x_3+(-2)\cdot x_4 \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+(-2)\cdot x_3+1\cdot x_4 \\ 2\cdot x_1+(-1)\cdot x_2+1\cdot x_3+(-1)\cdot x_4 \end{bmatrix}_{3x1}=\begin{bmatrix} -x_1+2x_3-2x_4 \\ x_2-2x_3+x_4 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4 \end{bmatrix}_{3x1}$$

Przykład 1. cd.

$$Ax = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$Ax = b$

układ równań liniowych w zapisie macierzowym

układ równań liniowych w zapisie klasycznym

Przykład 2.

Dany układ równań zapisz w postaci macierzowej.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Przykład 2. cd.

Macierzowy zapis układu równań: $Ax = b$.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Układ równań zapisany z wyszczególnieniem współczynnika przy każdej niewiadomej:

$$\begin{cases} (-1)\cdot x_1 + & 0\cdot x_2 + & 2\cdot x_3 + & (-2)\cdot x_4 = & -5 \\ 0\cdot x_1 + & 1\cdot x_2 + & (-2)\cdot x_3 + & 1\cdot x_4 = & 1 \\ 2\cdot x_1 + & (-1)\cdot x_2 + & 1\cdot x_3 + & (-1)\cdot x_4 = & 1 \end{cases}$$

Przykład 2. cd.

$$\begin{cases} (-1)\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + (-2)\cdot x_4 = -5 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + (-2)\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 1 \\ 2\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + (-1)\cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

x_1 x_2 x_3 x_4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & & + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

można zapisać w postaci *Ax = b*, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych cd.

W odniesieniu do układu równań liniowych w postaci $Ax = b$, stosowane są określenia:

A - macierz układu (wymiar $m \times n$)

x - wektor niewiadomych (wymiar $n \times 1$)

b - wektor prawych stron (wymiar $m \times 1$)

Układ równań liniowych Cramera

Układ równań liniowych

$$Ax = b$$

nazywa się układem Cramera, jeśli macierz układu A jest kwadratowa i nieosobliwa.

Układ Cramera posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Uwaga na tablicy.

Metody rozwiązywania układu Cramera

- **wzory Cramera**
- **metoda macierzy odwrotnej ***

Wzory Cramera

Rozwiązanie układu równań Cramera $Ax = b$, gdzie:

A – macierz stopnia n,

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, $\quad b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$,

podają wzory Cramera:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

gdzie: A_i - macierz powstała po zastąpieniu i-tej kolumny macierzy A kolumną prawych stron b.

Przykład

Wyznacz rozwiązanie układu równań przy użyciu wzorów Cramera.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Postać macierzowa układu, to *Ax=b*, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład cd.

Czy dany układ jest układem Cramera?

$$det\ A = det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= [6+0+0] - [(-2)+4+0] = 6-2 = 4$$

Mamy $det\ A \neq 0$, więc układ $Ax = b$ jest układem Cramera.

Przykład cd.

Macierz A_1:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1=\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}=-3$$

Przykład cd.

Macierz A_2:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$det\ A_2 = det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

Przykład cd.

Macierz A_3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$det\ A_3 = det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Przykład cd.

Po podstawieniu do wzorów Cramera:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{4}$$

***Uwaga*. Te trzy liczby stanowią JEDNO rozwiązanie układu równań liniowych. Można je zapisać w postaci wektora:**

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Przykład cd.

Sprawdzamy, czy zachodzi $Ax = b$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 0\cdot 1\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} \\ 0\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 1\cdot 1\frac{1}{2} + (-2)\cdot\frac{1}{4} \\ (-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + (-1)\cdot 1\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zatem wektor $x^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 1\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ jest poszukiwanym rozwiązaniem układu równań $Ax = b$.