Temat*:

Operacje elementarne na wierszach macierzy

Operacje elementarne na wierszach macierzy

$$A_{n\,x\,m} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Typy operacji elementarnych

1. **Zamiana miejscami wierszy w_i oraz w_j,**

   ozn.: $$w_i \leftrightarrow w_j$$

2. **Mnożenie wiersza w_i przez liczbę $k \neq 0$,**

   ozn.: $$w_i := w_i \cdot k$$

3. **Dodanie do wiersza w_i innego wiersza w_j pomnożonego przez liczbę k,**

   ozn.: $$w_i := w_i + w_j \cdot k$$

Operacja elementarna typu $w_i \leftrightarrow w_j$

Zamiana miejscami wierszy w_i oraz w_j

$$A \underset{w_i \leftrightarrow w_j}{\sim} A_1$$

(*czyt*.: macierz A jest równoważna macierzy A_1)

Przykład

Uwaga

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\underset{w_1\leftrightarrow w_3}{\sim}\begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & -2\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\underset{w_1\leftrightarrow w_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}=A_1$$

Własności operacji typu $w_i \leftrightarrow w_j$

Jeśli $$A \underset{w_i \leftrightarrow w_j}{\sim} A_1,$$ **to:**

- $\det A_1 = -\det A$

Informacja wyprzedzająca:

- $\mathrm{rz}\, A_1 = \mathrm{rz}\, A$ (*czyt.*: **rząd macierzy**)

Operacja elementarna typu $w_i := w_i \cdot k$

Mnożenie wiersza w_i przez liczbę $k \neq 0$

$$A \underset{w_i := w_i \cdot k}{\sim} A_2$$

(*czyt.*: macierz *A* jest równoważna macierzy A_2)

Przykład

Uwaga:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \underset{w_1\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix}\dots & \dots & \dots\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

w_1 :	**-2**	**0**	**2**
$w_1\cdot$(-1/2) :	**1**	**0**	**-1**

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix} \underset{w_1\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}=A_2$$

Własności operacji typu $w_i \cdot k$

Jeśli $A \underset{w_i \cdot k}{\sim} A_2$, **to:**

- ***det*** $\boldsymbol{A_2 = k \cdot \det A}$

Informacja wyprzedzająca:

- ***rz*** $\boldsymbol{A_2 = \mathrm{rz}\, A}$

Operacja elementarna typu $w_i := w_i + w_j \cdot k$

Dodanie do wiersza w_i innego wiersza w_j

pomnożonego przez liczbę k,

$$\boldsymbol{A} \underset{w_i := w_i + w_j \cdot k}{\sim} \boldsymbol{A}_3$$

(*czyt.*: macierz *A* jest równoważna macierzy A_3)

Przykład

Uwaga:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\underset{w_3:=w_3+w_1\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}=A_3$$

w_3 :	1	-1	3
$w_1\cdot(-1/2)$:	1	0	-1
$w_3+w_1\cdot(-1/2)$:	2	-1	2

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}\underset{w_3:=w_3+w_1\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}=A_3$$

Własności operacji typu $w_i := w_i + w_j \cdot k$

Jeśli $A \underset{w_i := w_i + w_j \cdot k}{\sim} A_3$ **,** **to:**

- ***det*** $\boldsymbol{A_3 = \det A}$

Informacja wyprzedzająca:

- ***rz*** $\boldsymbol{A_3 = \mathrm{rz}\, A}$

Wektory jednostkowe

Macierz jednostkowa I_n:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Kolumny macierzy I_n nazywane są wektorami jednostkowymi wymiaru n.

Przykład

Różne wektory jednostkowe wymiaru 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Postać bazowa macierzy A_{nxm}

Postacią bazową macierzy A będziemy nazywać macierz równoważną macierzy A, o maksymalnej liczbie kolumn będących różnymi wektorami jednostkowymi.

Rzędem macierzy A będziemy nazywać maksymalną liczbę różnych wektorów jednostkowych występujących jako kolumny w postaci bazowej macierzy A;

ozn.: A, rank A.

Przykład

Oblicz rząd macierzy *B*.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 12 & -2 & 10 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Przykład cd.

Stosujemy kolejno operacje elementarne:

$$w_1 \cdot \tfrac{1}{3}\,,$$

$$w_2 := w_2 + w_1 \cdot (-12)\,,$$

$$w_3 := w_3 + w_1 \cdot (-7)\,,$$

$$w_2 \cdot (-\tfrac{1}{6})\,,$$

$$w_1 := w_1 + w_2 \cdot (-\tfrac{1}{3})\,,$$

$$w_3 := w_3 + w_2 \cdot \tfrac{10}{3}\,.$$

Obliczenia samodzielne.

Przykład cd.

i otrzymujemy:

$$B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 12 & -2 & 10\\ 7 & -1 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B_1$$

B_1 – postać bazowa macierzy B

$$B_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

dwa różne wektory jednostkowe

Odp.: rz B = 2.

Układy równań liniowych

Układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie:
A - macierz układu wymiaru $m \times n$,
$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ (n - liczba niewiadomych),
$b = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$ (m – liczba równań),

może mieć:

- **dokładnie jedno rozwiązanie (u. oznaczony),**
- **nieskończenie wiele rozwiązań (u. nieoznaczony),**
- **żadnego rozwiązania (u. sprzeczny).**

Układy równań liniowych cd.

Macierz *A* z dopisaną na końcu kolumną prawych stron *b* nazywa się macierzą rozszerzoną:

ozn.: $$A\,|\,b$$

Liczbę rozwiązań układu równań liniowych można określić porównując rzędy macierzy: *A*, *A*|*b* z liczbą niewiadomych.

Liczba rozwiązań układu równań liniowych

Układ równań $A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$

$\mathrm{rz}\, A < \mathrm{rz}[A|b]$
układ sprzeczny
(nie ma rozwiązań)

$\mathrm{rz}\, A = \mathrm{rz}[A|b]$
układ posiada rozwiązania

$\mathrm{rz}\, A = \mathrm{rz}[A|b] = n$
układ oznaczony
(ma dokładnie jedno rozwiązanie)

$\mathrm{rz}\, A = \mathrm{rz}[A|b] < n$
układ nieoznaczony
(ma nieskończenie wiele rozwiązań)

Przykład 1.

Rozwiąż układ równań *Ax* = *b*, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Przykład 1. cd.

$$[A|b]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 3 \\ -1 & 3 & -2 & \vdots & 4 \\ -5 & 4 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & -4 & \vdots & 7 \\ 0 & 14 & -11 & \vdots & 19 \end{bmatrix} \sim$$

$w_2 := w_2 + w_1$

$w_3 := w_3 + w_1 \cdot 5$

$w_2 \cdot (1/5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \vdots & \frac{7}{5} \\ 0 & 14 & -11 & \vdots & 19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \vdots & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \vdots & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \vdots & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \sim$$

$w_1 := w_1 + w_2 \cdot (-2)$

$w_3 := w_3 + w_2 \cdot (-14)$

$w_3 \cdot 5$

Przykład 1. cd.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$w_1 := w_1 + w_3 \cdot (2/5)$

$w_2 := w_2 + w_3 \cdot (4/5)$

Wnioski: $rzA = 3$, rz $[A|b] = 3$, liczba niewiadomych = 3, zatem układ równań jest oznaczony.

Rozwiązaniem jest wektor $x = [-1,-1,-3]^T$.

Przykład 2.

Rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ -3 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 2. cd.

$$[A|b]=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & \vdots & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ -3 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & -2 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ -3 & -3 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$w_1 \cdot (-1)$

$w_2 := w_2 + w_1(-2)$

$w_3 := w_3 + w_1 \cdot 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & 2 & \vdots & 6 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \sim$$

$w_3 \cdot (-1/3)$

$w_1 := w_1 + w_2 \cdot (-2)$

$w_3 := w_3 + w_2 \cdot (-3)$

Przykład 2. cd.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array}\right]$$

Wnioski: $rzA = 2$, $rz\,[A|b] = 2$, **liczba niewiadomych = 3, zatem układ równań jest nieoznaczony. Można wyznaczyć jego rozwiązania.**

Przykład 2. cd.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

kolumny bazowe

kolumna niebazowa

Przykład 2. cd.

zmienna niebazowa

zmienne bazowe

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Oznaczenie dla zmiennej niebazowej

$$x_3 = s, \quad s \in R$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}s = 2 \\ x_2 - \frac{2}{3}s = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}s + 2 \\ x_2 = \frac{2}{3}s - 2 \\ x_3 = s \end{cases}, \quad s \in R$$

Rozwiązania szczególne układu równań:

Np. dla s = 0: x = [2, -2, 0]^T,

dla s = 3: x = [1, 0, 3]^T.