

Zadania - OPERACJE ELEMENTARNE, RZĄD MACIERZY

Uwaga. Zadania z gwiazdką (*) adresowane są do osób nadzwyczajnie zainteresowanych tematem.

Zadanie 1*. Oblicz pisemnie rząd macierzy stosując operacje elementarne na wierszach.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedzi: rzA=2, rzB=2, rzC=3, rzD=3, rzE=2, rzF=2, rzG=3, rzH=4, rzK=3, rzL=2, rzM=3, rzN=2.

Zadanie 2. Podaj liczbę rozwiązań układu równań stosując operacje elementarne i obliczając rzędy odpowiednich macierzy z zastosowaniem polecenia **rank** programu *wxMaxima online*.

$$\text{a) } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_3 = -14 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_4 = 11 \end{cases}$$

Odpowiedzi: a) sprzeczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony, d) nieoznaczony, e) sprzeczny, f) nieoznaczony.

Zadania - OPERACJE ELEMENTARNE, RZĄD MACIERZY

Zadanie 3. Podaj liczbę rozwiązań układu równań obliczając rzędy odpowiednich macierzy z zastosowaniem polecenia **rank** programu *wxMaxima online*. Wyznacz rozwiązanie układu równań z zastosowaniem polecenia **solve** programu *wxMaxima online*.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 13x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 9x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{y) } \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -9 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 14 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} -3x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = -4 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -11 \\ -x_1 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 = -6 \\ -2x_1 + x_2 = 12 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_4 = 6 \end{cases}$$

Odpowiedzi:

a) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ oznaczony, $\mathbf{x}^T = [2, 1, -3]$,

b) $\text{rzA} = 2$, $\text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ sprzeczny,

c) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ nieozn., rozw. ogólne: $\mathbf{x}^T = [18s + 38, -11s - 22, 5s + 10, s]$, $s \in \mathbb{R}$,

y) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ oznaczony, $\mathbf{x}^T = [-5, 0, 4]$,

d) $\text{rzA} = 2$, $\text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ sprzeczny,

e) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, układ oznaczony, $\mathbf{x}^T = [2, -2]$,

f) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, układ nieozn., rozw. ogólne: $\mathbf{x}^T = [4/3s, -5/9s + 1/9t, s, t]$, $s, t \in \mathbb{R}$,

g) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, układ nieozn.,

rozw. ogólne: $\mathbf{x}^T = [2s - t - 2r - 1, s, -s + t - 2r - 1, t, r, -s + 3r + 2]$, $s, t, r \in \mathbb{R}$,

h) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2$, układ nieozn., rozw. ogólne: $\mathbf{x}^T = [1 - s, 4 + 2s, s]$, $s \in \mathbb{R}$,

i) $\text{rzA} = \text{rz}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 4$, układ oznaczony, $\mathbf{x}^T = [-1, 10, -4, -8]$.

Zadanie 4. Dla macierzowego zapisu układu równań liniowych dane są macierz układu \mathbf{A} oraz wektor prawych stron \mathbf{b} . Podaj liczbę rozwiązań układu równań obliczając rzędy odpowiednich macierzy z zastosowaniem polecenia **rank** programu *wxMaxima online*. Wyznacz rozwiązanie układu równań z zastosowaniem polecenia **solve** programu *wxMaxima online*.

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zadania - OPERACJE ELEMENTARNE, RZĄD MACIERZY

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Odpowiedzi:

a) $\text{rz}A=2$, $\text{rz}[A|b]=2$, układ nieoznaczony, $x^T = [-s+2, 5s-3, s]$, $s \in \mathbb{R}$,

b) $\text{rz}A=2$, $\text{rz}[A|b]=2$, układ nieoznaczony, $x^T = [-2s+3, s+2]$, $s \in \mathbb{R}$,

c) $\text{rz}A=3$, $\text{rz}[A|b]=3$, układ oznaczony, $x^T = [1, 0, -1]$,

UWAGA DO NASTĘPNEGO ZADANIA: wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Przykłady

$$\det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = (-3) \cdot 4 \cdot (-5) = 60, \quad \det \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = (-3) \cdot 0 \cdot (-5) = 0$$

Zadanie 5*. Oblicz wyznacznik macierzy sprowadzając ją do postaci trójkątnej górnej (dolnej) przy zastosowaniu odpowiednich operacji elementarnych.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 12 & -2 & 10 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Odpowiedzi: $\det N=6$, $\det B=12$, $\det A=0$, $\det C=-8$, $\det X=-1$, $\det Y=-5$, $\det Z=-14$.

Zadania - OPERACJE ELEMENTARNE, RZĄD MACIERZY

Zadanie 6. Wyznacz macierz odwrotną do danej (o ile istnieje) z zastosowaniem polecenia ***invert*** programu *wxMaxima online*.

$$A1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odpowiedzi: $A1^{-1}$ istnieje ($\det A1 = -1$), $A2^{-1}$ nie istnieje ($\det A2 = 0$, $\text{rz} A2 = 2$),

dr Anna Rajfura