Zadania – GEOMETRIA ANALITYCZNA

Odległość między punktami *A*, *B*, ozn. *d*(*A*,*B*):

w przestrzeni R^2: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\quad d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

w przestrzeni R^3: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ $\quad d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Współrzędne wektora zaczepionego $\overrightarrow{AB}$; długość wektora zaczepionego ozn. $|\overrightarrow{AB}|$

w R^2: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\quad \overrightarrow{AB}=[x_2-x_1, y_2-y_1]$; $\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

w R^3: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ $\quad \overrightarrow{AB}=[x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]$;

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1^2)}$

Wersory osi w przestrzeni R^2: wersor OX $\quad \vec{i}=[1,0]$, wersor OY $\quad \vec{j}=[0,1]$

Wersory osi w przestrzeni R^3:

wersor OX: $\vec{i}=[1,0,0]$, wersor OY: $\vec{j}=[0,1,0]$, wersor OZ: $\vec{k}=[0,0,1]$

Działania na wektorach swobodnych $\vec{u}, \vec{v}$:

w R^2: $\vec{u}=[u_x, u_y]$, $\quad \vec{v}=[v_x, v_y]$, $\quad \vec{u}+\vec{v}=[u_x+v_x, u_y+v_y]$, $\quad s\cdot\vec{u}=[s\cdot u_x, s\cdot u_y]$

w R^3: $\vec{u}=[u_x, u_y, u_z]$, $\quad \vec{v}=[v_x, v_y, v_z]$, $\quad \vec{u}+\vec{v}=[u_x+v_x, u_y+v_y, u_z+v_z]$, $\quad s\cdot\vec{u}=[s\cdot u_x, s\cdot u_y, s\cdot u_z]$

Długość wektora swobodnego $\vec{u}$, ozn. $|\vec{u}|$

w R^2: $\vec{u}=[u_x, u_y]$, $\quad |\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$

w R^3: $\vec{u}=[u_x, u_y, u_z]$, $\quad |\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$

Wektor swobodny - współrzędne i składowe:

w R^2: $\vec{v}=[v_x, v_y]=\vec{v}_x+\vec{v}_y=v_x\cdot\vec{i}+v_y\cdot\vec{j}$

w R^3: $\vec{v}=[v_x, v_y, v_z]=\vec{v}_x+\vec{v}_y+\vec{v}_z=v_x\cdot\vec{i}+v_y\cdot\vec{j}+v_z\cdot\vec{k}$

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}, \vec{v}$, ozn. $\vec{u}\circ\vec{v}$:

$\vec{u}\circ\vec{v} \overset{df}{=} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$, $\quad \alpha-$miara kąta między wektorami

wzór w R^2: $\vec{u}\circ\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$

wzór w R^3: $\vec{u}\circ\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$

Iloczyn wektorowy w R^3 wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ (niezerowych), ozn. $\vec{u}\times\vec{v}$:

$$\vec{u}=[u_x, u_y, u_z], \quad \vec{v}=[v_x, v_y, v_z], \quad \vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\alpha$$

Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ozn. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\vec{u}=[u_x, u_y, u_z],\ \vec{v}=[v_x, v_y, v_z],\ \vec{w}=[w_x, w_y, w_z],\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \overset{df}{=} \vec{u}\circ(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$ (wyzn)

Pole równoległoboku w R^3 rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$: $P_R=|\vec{u}\times\vec{v}|$

Pole trójkąta w R^3 rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}$: $P_T=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

Objętość równoległościanu w R^3 rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $V_R=|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ (wart. bezwzg. liczby)

Objętość czworościanu w R^3 rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $V_C=\frac{1}{6}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ (wart. bezwzg. liczby)

Zadanie 1. Dla danych wektorów $\vec{u}=[-3,8]$, $\vec{v}=[2,1]$, $\vec{w}=[0,-4]$ wyznacz wektory (zapisz współrzędne): $\vec{a}=4\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}$, $\vec{b}=-\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$.

Odpowiedzi: $\vec{a}=[-18,21], \vec{b}=[7,-2]$.

Zadanie 2. Dla danych wektorów $\vec{u}=[-3,0,1]$, $\vec{v}=[2,-1,1]$, $\vec{w}=[-1,2,-3]$ wyznacz wektory (zapisz współrzędne): $\vec{a}=4\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}$, $\vec{b}=-\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$

Odpowiedzi: $\vec{a}=[-20,7,-5], \vec{b}=[8,-4,4]$ **.**

Zadanie 3. Wyznacz długości wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ z zadania 1.

Odpowiedzi: $|\vec{a}|=3\sqrt{85}$, $|\vec{b}|=\sqrt{53}$.

Zadanie 4. Wyznacz długości wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ z zadania 2.

Odpowiedzi: $|\vec{a}|=\sqrt{474}$, $|\vec{b}|=4\sqrt{6}$ **.**

Zadanie 5. Do poniższych pytań podaj odpowiedź wraz z uzasadnieniem:
a) Czy wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ z zadania 1 są prostopadłe?
b) Czy wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ z zadania 2 są prostopadłe?
c) Czy wektory $[-3,8]$, $[16,6]$ są prostopadłe?
d) Czy wektory $[2,-1,2]$, $[-4,2,5]$ są prostopadłe?

Odpowiedzi: a) Nie, b) Nie, c) Tak, d) Tak.

Zadanie 6. Dane są punkty: $A(2,1)$, $B(-1,2)$, $C(0,-1)$. Oblicz cosinusy kątów wewnętrznych trójkąta *ABC*. Wyniki podaj w postaci dziesiętnej z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku (oznacz kąty: α - przy wierzchołku *A*, β - przy wierzchołku *B*, γ - przy wierzchołku *C*.

Odpowiedzi: $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}45$, $\cos\beta=\cos\gamma=0{,}6$.

Zadanie 7. Dane są punkty: $A(2,3,-1)$, $B(-1,1,0)$, $C(-2,1,-1)$. Czy wektory $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ są współliniowe? Odpowiedź uzasadnij.

Odpowiedź: Nie.

Zadanie 8. Oblicz cosinusy kątów wewnętrznych trójkąta *ABC* dla punktów *A, B, C* z zad. 7. Wyniki podaj w postaci dziesiętnej z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku (oznacz kąty: α - przy wierzchołku *A*, β - przy wierzchołku *B*, γ - przy wierzchołku *C*.

Odpowiedź: $\cos\alpha\approx 0{,}96$, $\cos\beta\approx -0{,}38$, $\cos\gamma\approx 0{,}63$

***Zadanie 9.** Wyznacz rzut prostokątny wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$, ozn. $\vec{a_b}$. Wyznacz długość wektora $\vec{a_b}$.

a) $\vec{a}=[1,2]$, $\vec{b}=[3,1]$ Wykonaj rysunek w układzie współrzędnych *XOY*.

b) $\vec{a}=[1,2,-1]$, $\vec{b}=[3,-1,0]$

Odpowiedzi: a) $\vec{a_b}=[\frac{3}{2},\frac{1}{2}], |\vec{a_b}|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, b) $\vec{a_b}=[0{,}3\,;-0{,}1\,;\,0], |\vec{a_b}|=\frac{\sqrt{10}}{10}$

***Zadanie 10.** Wyznacz wersor wektora $\vec{a}$.

a) $\vec{a}=[-1,5]$ Wykonaj rysunek w układzie współrzędnych *XOY*.

b) $\vec{a}=[2,-1,3]$

Zadanie 11. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach: $A(-3,1,0)$, $B(2,-1,2)$, $C(-1,0,-1)$.

Odpowiedź: $\frac{7\sqrt{(2)}}{2}$

Zadanie 12. Dane są punkty: $A(1,3,0)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,1,1)$. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{AB}$, $\vec{AC}$. Podaj wartość dokładną oraz wartość przybliżoną, zapisaną w postaci dziesiętnej z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

Odpowiedź: $\sqrt{93}\approx 9{,}64$

Zadanie 13. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, gdzie: $A(1,8,2)$, $B(-2,3,4)$, $C(3,-2,1)$, $D(-2,2,5)$.

Odpowiedź: $V=27$

Zadanie 14. Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach: $A(2,1,4)$, $B(-1,2,1)$, $C(5,-1,0)$, $D(-2,2,5)$.

Odpowiedź: $V=\frac{29}{6}\approx 4{,}83$

***Zadanie 15.** Punkty $A(3,1)$, $B(4,2)$, $C(2,4)$, $D(1,3)$ na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ są wierzchołkami czworokąta. Na punktach czworokąta zastosowano obrót o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu *O*(0,0). Zapisz macierz tego przekształcenia. Zapisz współrzędne punktów po przekształceniu.

***Zadanie 16.** Punkty $A(3,1)$, $B(4,2)$, $C(2,4)$, $D(1,3)$ na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ są wierzchołkami czworokąta. Na punktach czworokąta zastosowano skalowanie: $s_x=2$, $s_y=3$. Zapisz macierz tego przekształcenia. Zapisz współrzędne punktów po przekształceniu.

dr Anna Rajfura