Temat wykładu:

Całka oznaczona

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie
pomarańczowy – uwaga
kursywa – komentarz

Zagadnienia

1. Definicja
2. Reguły całkowania
3. Przykłady i zastosowania

Całka oznaczona

Zapis:

górna granica całkowania

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

dolna granica całkowania

Czytamy: całka oznaczona z $f(x)$ po dx w granicach od a do b

Definicja

Niech funkcja $f\!:D \to R$ będzie ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle \subset D$.

Całką oznaczoną funkcji f w granicach od a do b nazywamy liczbę:

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} F(b) - F(a) \overset{ozn}{=} F(x)\Big|_a^b$$

gdzie

F - dowolna funkcja pierwotna funkcji f

Przykład 1

Oblicz całkę oznaczoną funkcji $f(x) = 2x + 1$ w granicach od 1 do 5.

Przykład 1 cd.

$$\int_{1}^{5} (2x+1)\,dx =$$

Najpierw obliczamy całkę nieoznaczoną funkcji *f* (*x*), aby otrzymać rodzinę funkcji pierwotnych.

$$\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + c, \quad c \in R$$

Z tej rodziny wybieramy jedną, dowolną funkcję pierwotną, np. dla *c* = 0:

$$F(x) = x^2 + x$$

Przykład 1 cd.

Obliczamy całkę oznaczoną, wykorzystując wzór wybranej funkcji pierwotnej.

$$F(x) = x^2 + x$$

$$\int_1^5 (2x+1)\,dx = F(5) - F(1) =$$

$$= (5^2 + 5) - (1^2 + 1) = 30 - 2 = 28$$

Przykład cd.

Inny zapis:

$$\int_1^5 (2x+1)\,dx = \left(x^2 + x\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \left(5^2 + 5\right) - \left(1^2 + 1\right) = 30 - 2 = 28$$

Uwagi nt. definicji całki oznaczonej

Własności całki oznaczonej

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx, \quad c \in R$$

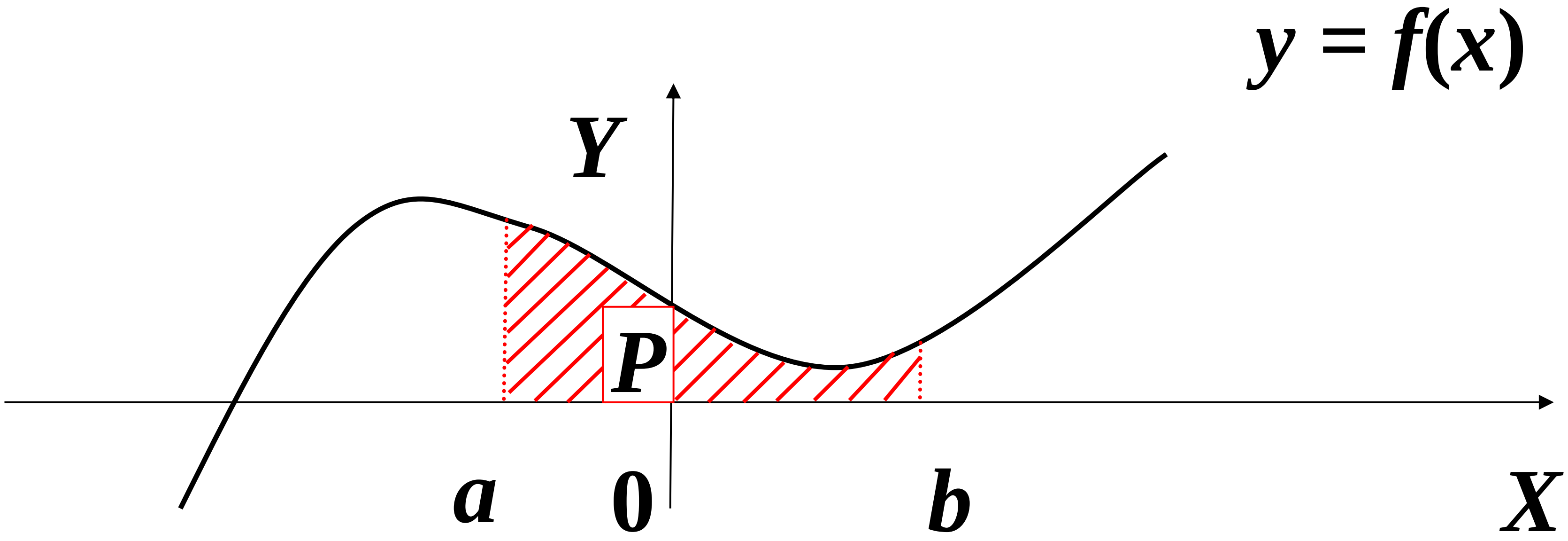
$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \quad c \in (a, b)$$

Zastosowania całki oznaczonej

Pole obszaru nad osią *OX*



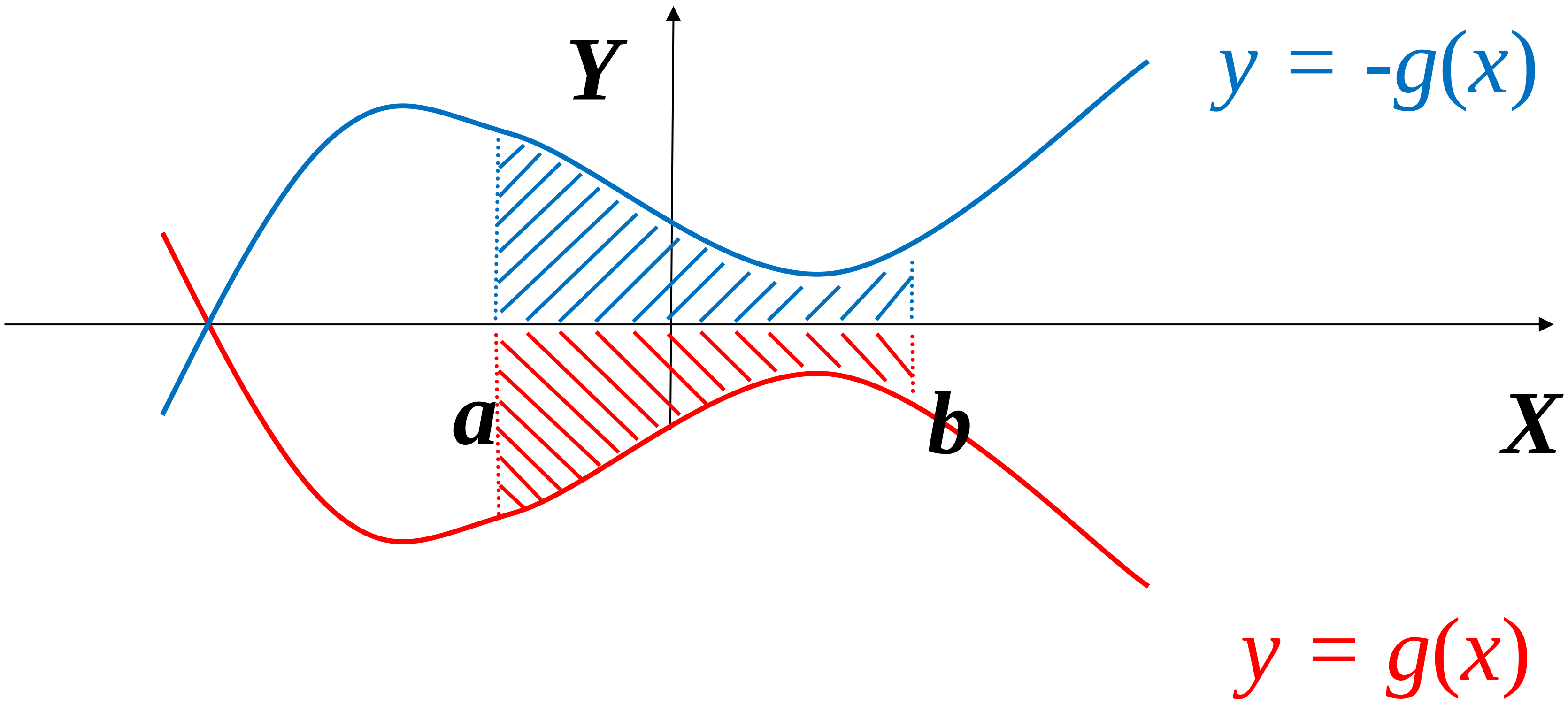
$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Interpretacja geometryczna

Całka jako pole obszaru nad osią *OX*

Jeżeli $f(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$, to całkę oznaczoną z funkcji *f* w granicach od *a* do *b* można interpretować jako pole obszaru ograniczonego z góry wykresem funkcji *f*, z dołu osią *OX*, z lewej prostą *x* = *a*, z prawej prostą *x* = *b*.

Pole obszaru pod osią *OX*

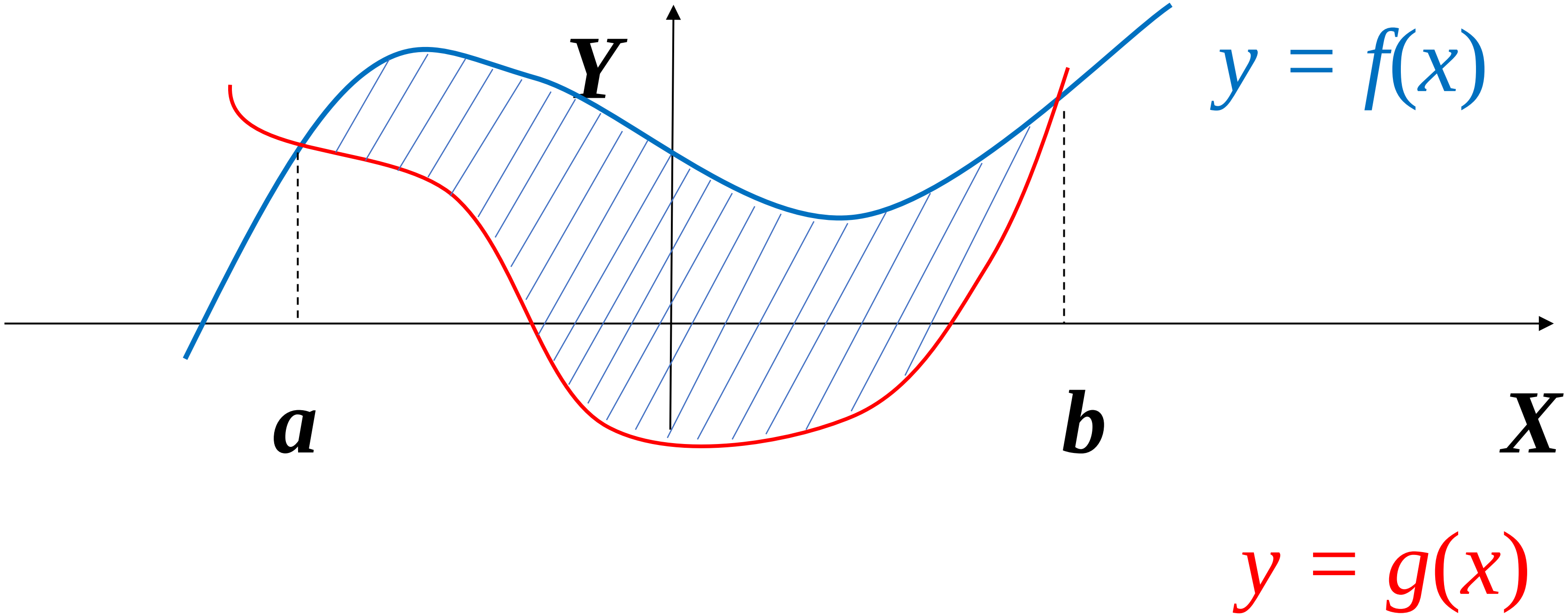


$\mathbf{P_d = P_g}$

$$P_d = P_g = \int_a^b [-g(x)]\, dx$$

Uwaga o obszarze rozdzielonym na części

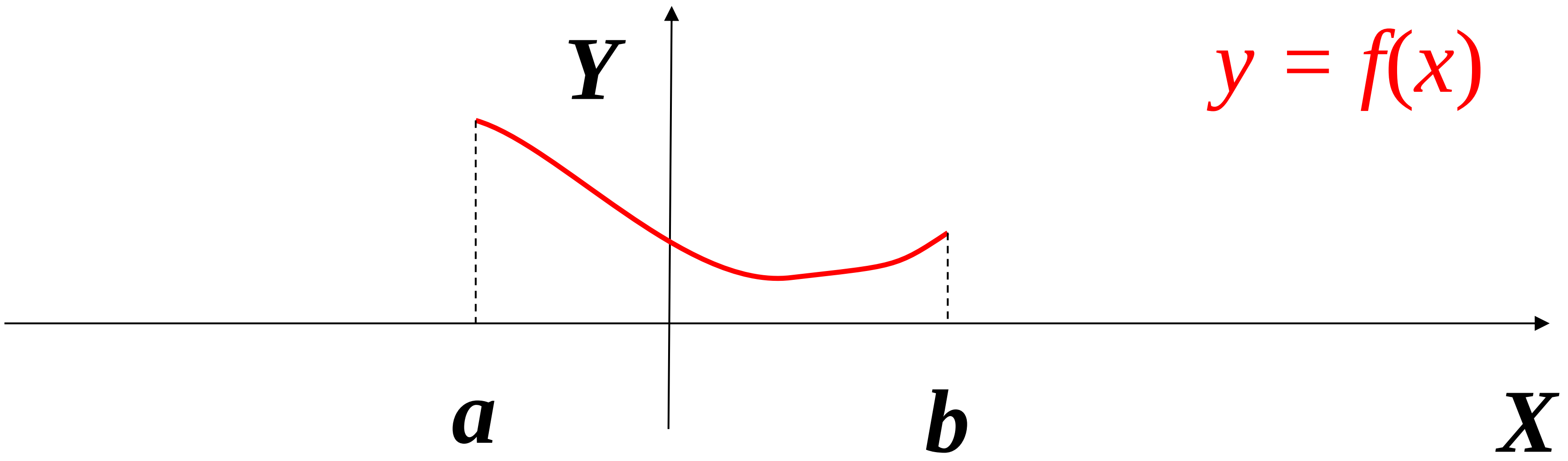
Pole obszaru między wykresami



$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

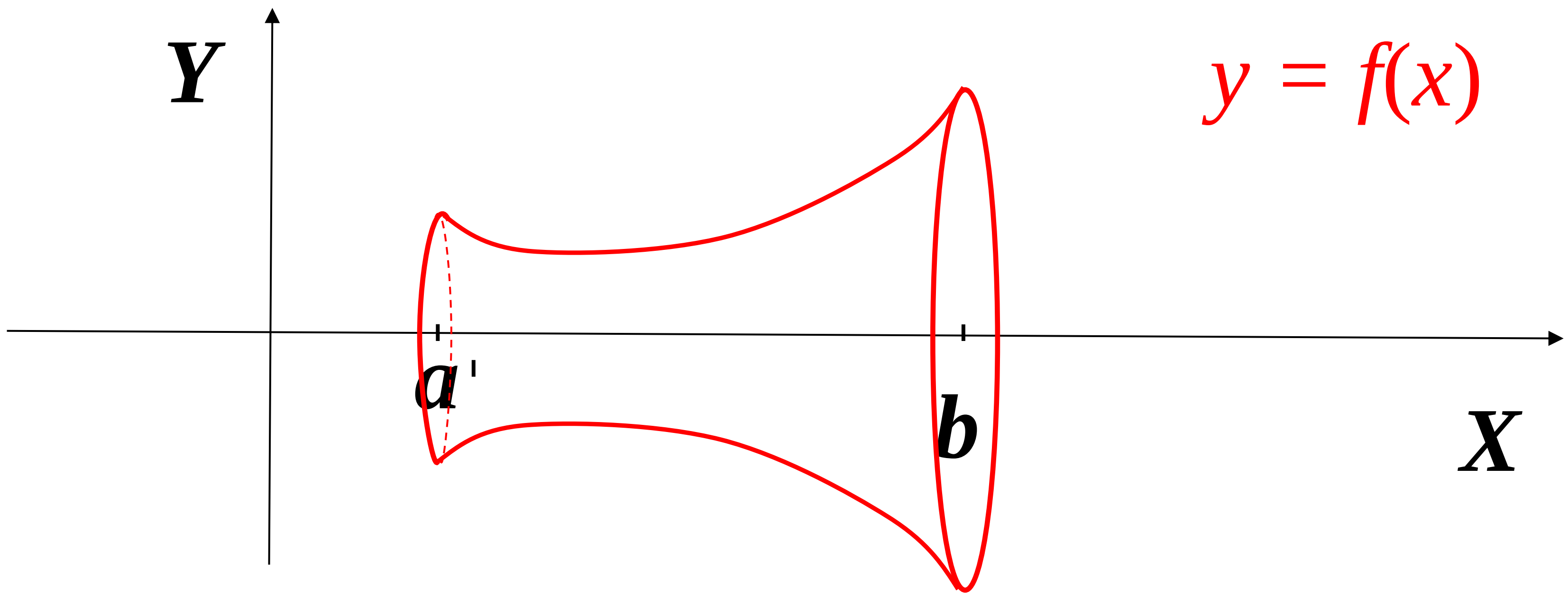
Punkty *a*, *b* wyznaczamy z równania *f*(*x*)=*g*(*x*)

Długość łuku L

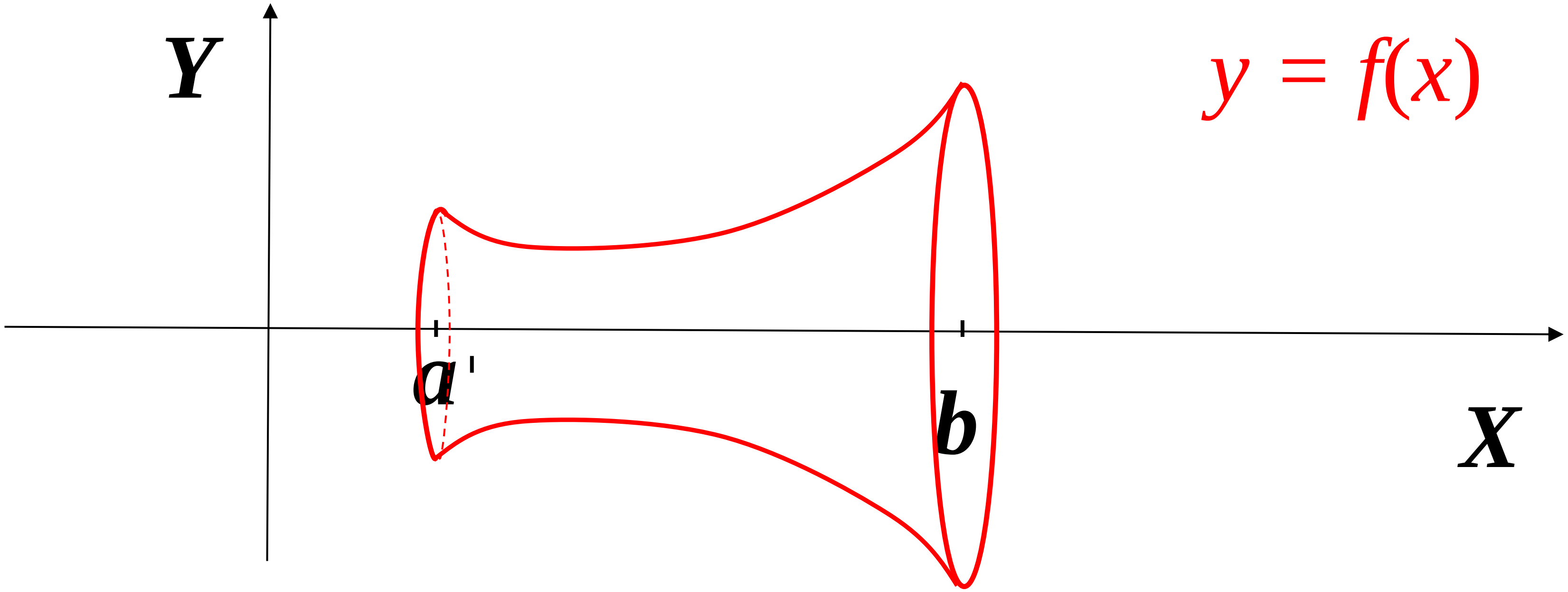


$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Bryła obrotowa

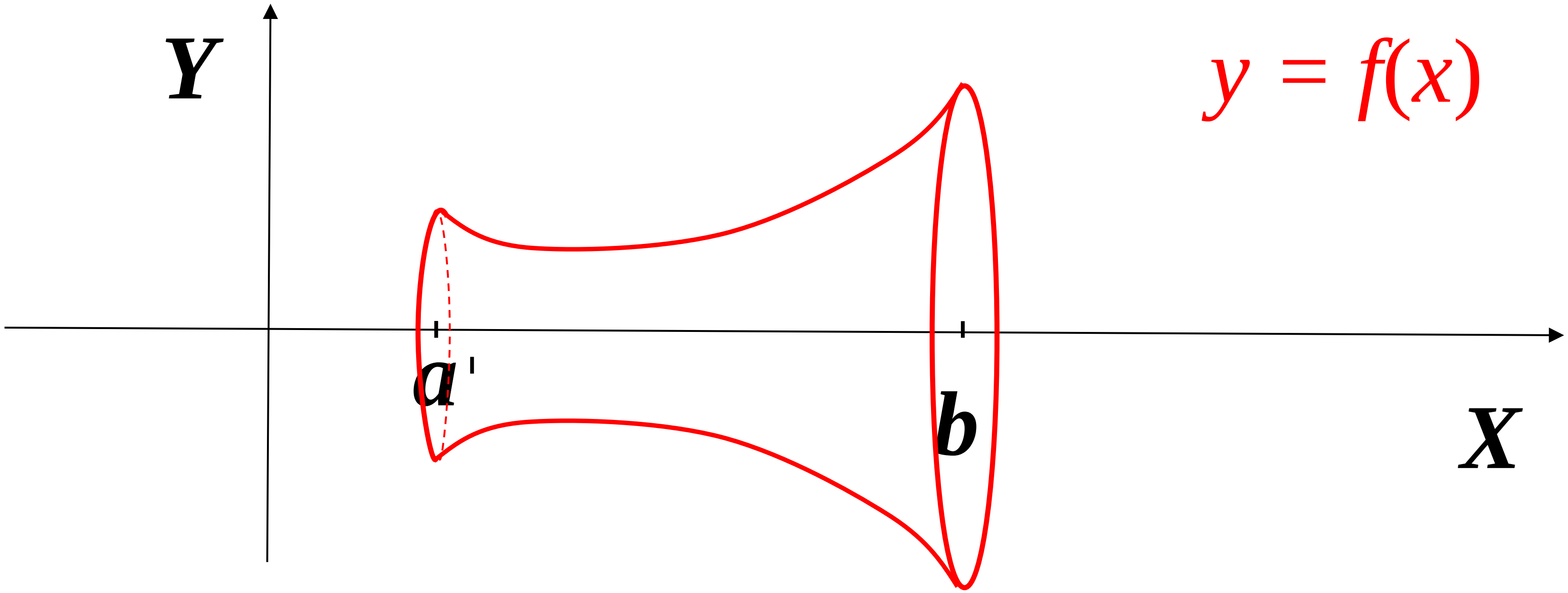


Objętość bryły obrotowej V



$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$$

Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej *S*



$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Całka niewłaściwa

Zagadnienia

1. **Definicja, przykłady**
2. **Zastosowania w statystyce matematycznej**
3. **Tablice dystrybuanty rozkładu normalnego**

Całka niewłaściwa

Oznaczenia:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

Uwaga. W powyższych przykładach przynajmniej jedna z granic całkowania jest nieskończona.

Definicja 1

Całką niewłaściwą funkcji $f : D \to R$ w granicach od a do $+\infty$, gdzie $(a, +\infty) \subset D$ nazywamy

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

Definicja 2

Całką niewłaściwą funkcji $f : D \to R$ w granicach od $-\infty$ do b, gdzie $(-\infty, b) \subset D$ nazywamy

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

Definicja 3

Całką niewłaściwą funkcji $f : R \to R$

w granicach od -∞ do +∞ nazywamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Uwaga

Jeżeli którakolwiek z powyższych granic jest skończona, to całkę niewłaściwą odpowiadającą tej granicy nazywamy zbieżną, natomiast jeśli jest niewłaściwa (-∞ lub +∞) lub nie istnieje, to taką całkę nazywamy rozbieżną.

Przykłady na tablicy

Zastosowania

W rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej wykorzystuje się funkcje spełniające następujące warunki:

$$\forall x \in R \quad f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \quad = 1$$

Funkcje takie nazywamy funkcjami gęstości prawdopodobieństwa (fgp) ustalonego rozkładu.

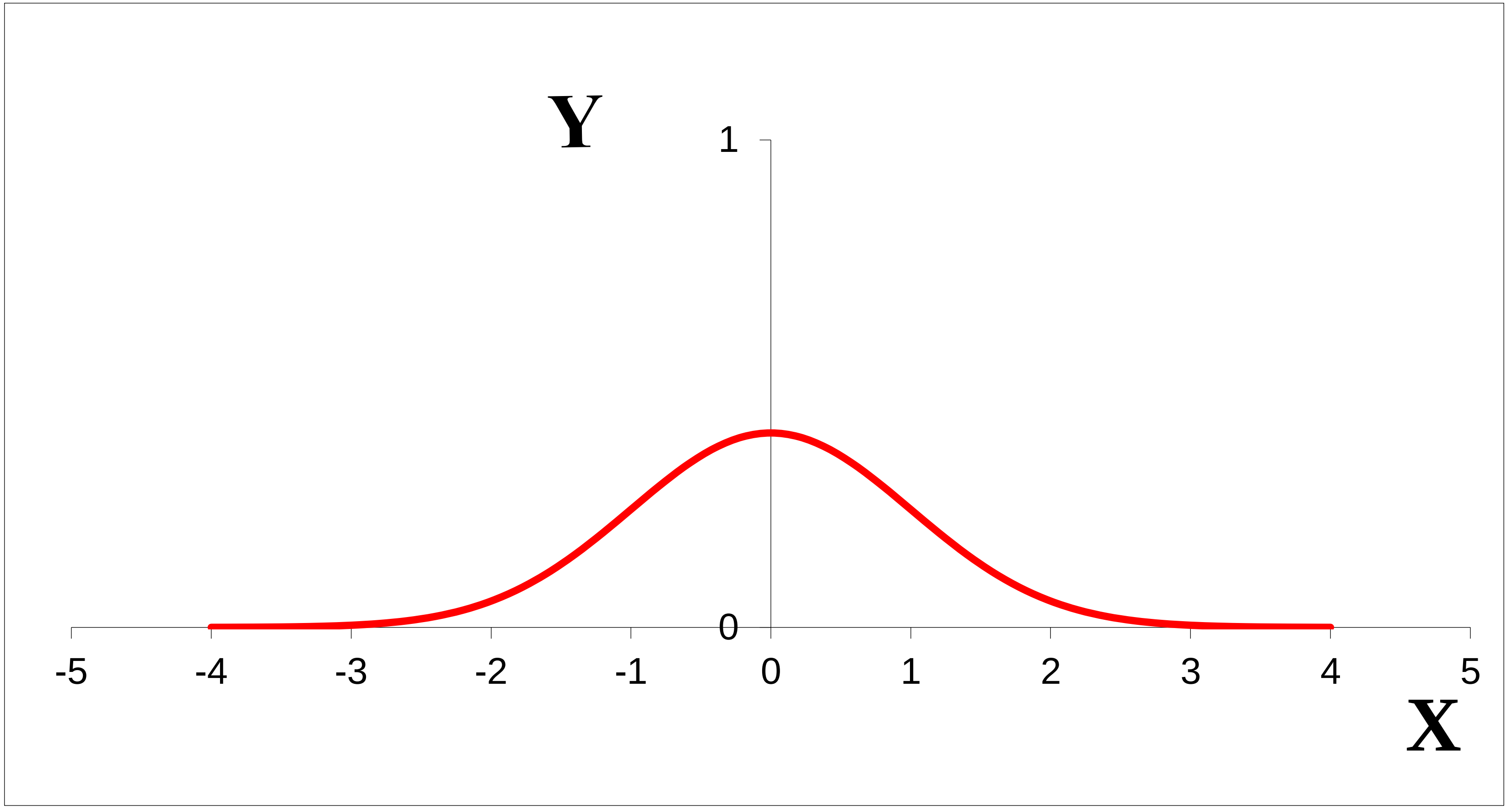
Przykład - wzór

Wzór funkcji gęstości p-stwa dla rozkładu normalnego standardowego

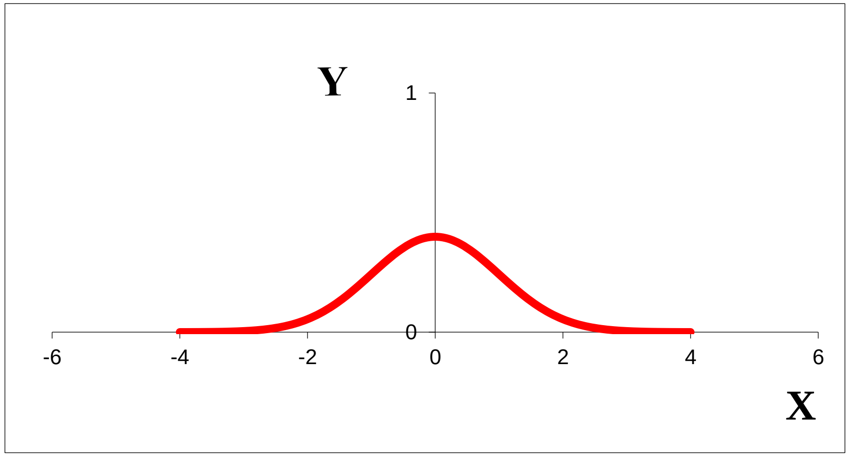
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Przykład - wykres

Wykres fgp dla rozkładu normalnego standardowego nazywamy krzywą Gaussa.



Przykład – własności funkcji



1. **Dziedzina** $D=R$
2. **Miejsca zerowe** – brak
3. **Granice** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

(prosta $y=0$ jest asymptotą obustronną)

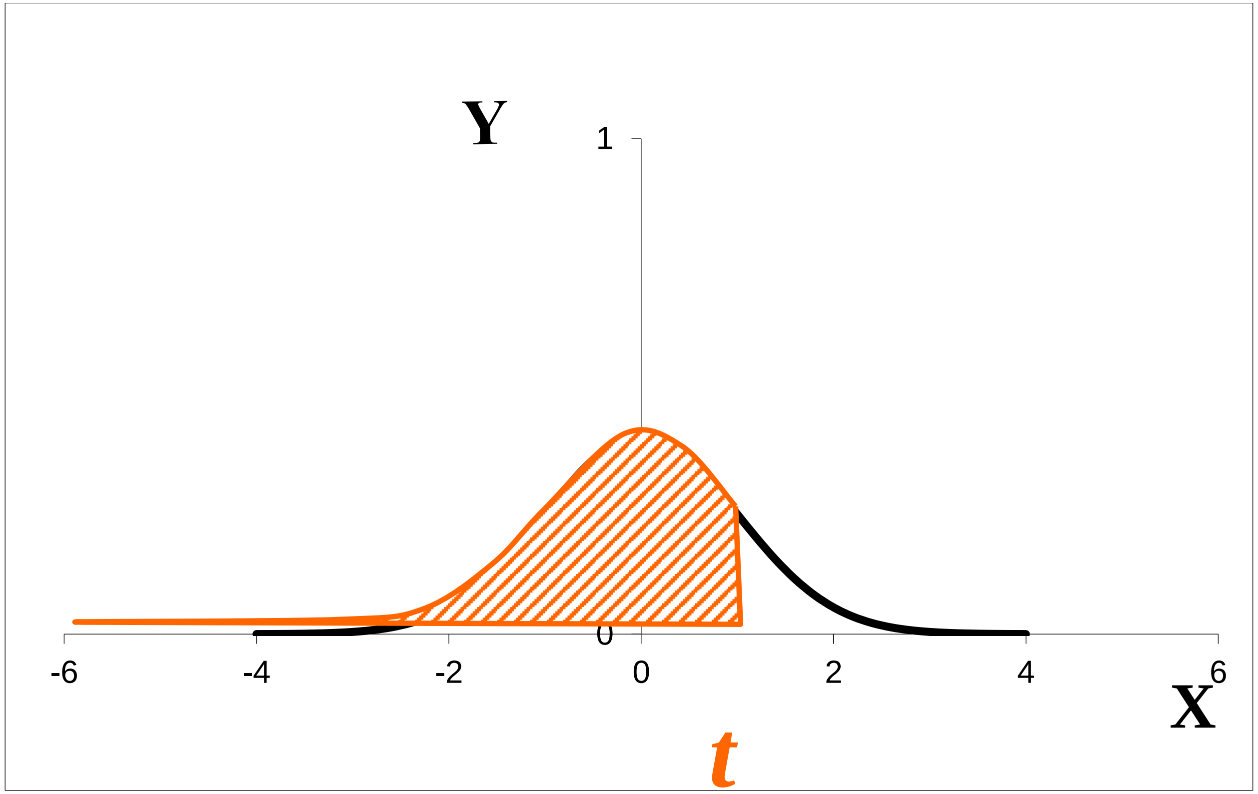
4. **Monotoniczność**

$$f\uparrow \quad dla \quad x\in\left(-\infty;0\right\rangle, \qquad f\downarrow \quad dla \quad x\in\left\langle 0;+\infty\right)$$

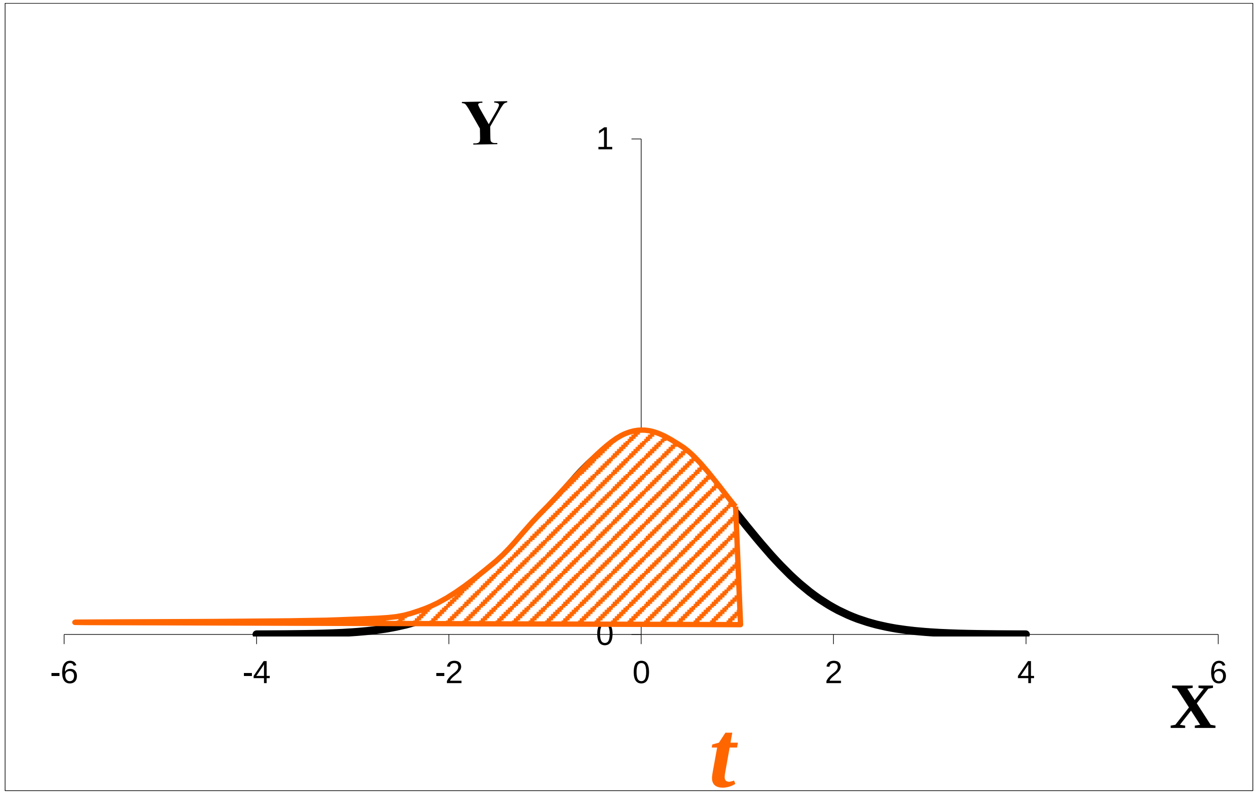
5. **Maksimum**

$$x_{\max}=0, \qquad y_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Pole pod krzywą Gaussa

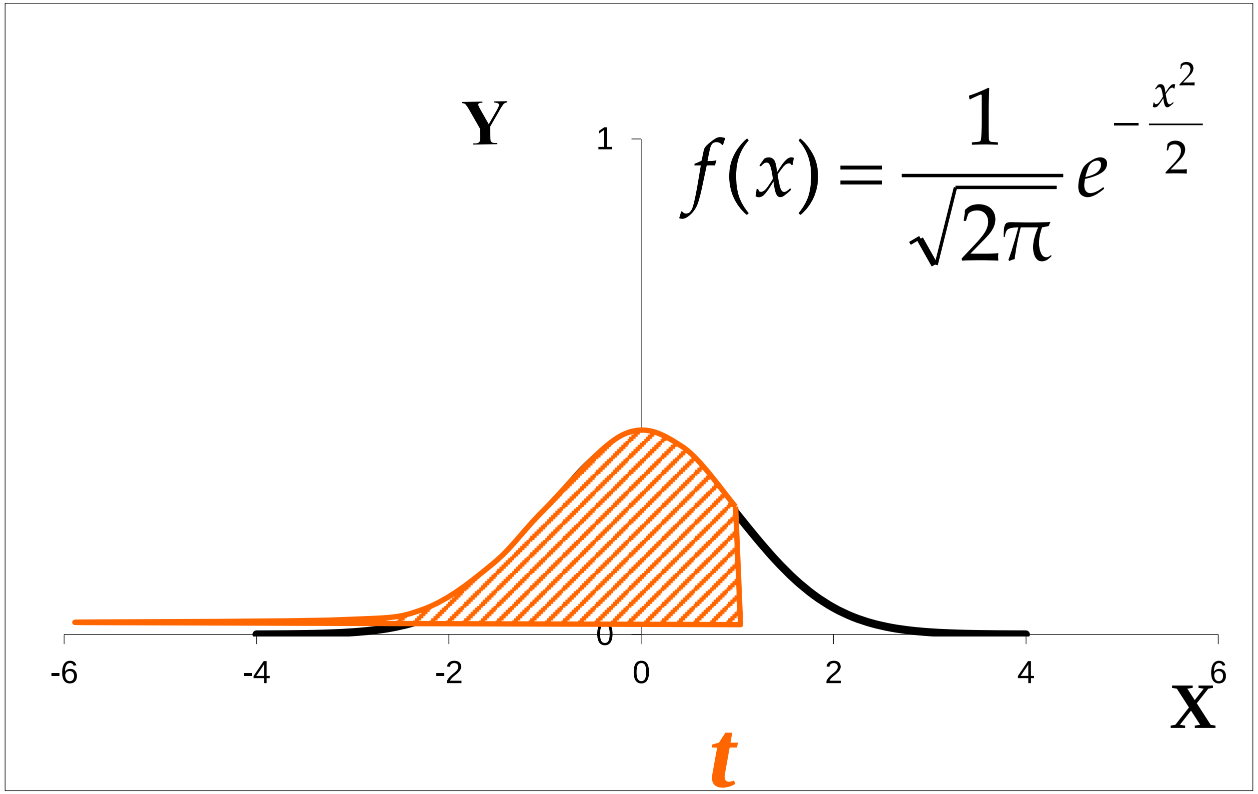


Pole pod krzywą Gaussa



$$P = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Pole pod krzywą Gaussa



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Funkcja dystrybuanty

Funkcja gęstości p-stwa $f(x)$

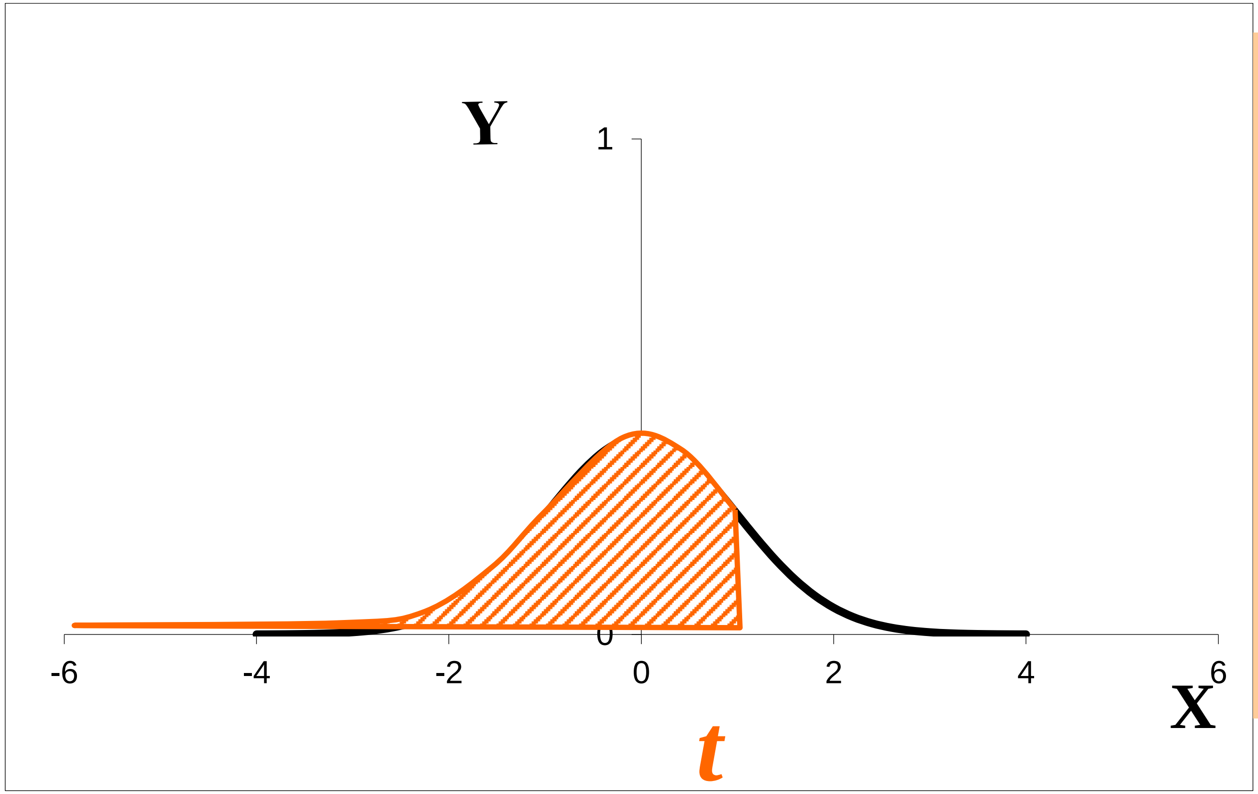
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funkcja dystrybuanty $F(t)$

$$F(t) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Interpretacja dystrybuanty

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \text{Pole lewego ogona}$$



Dystrybuanta $F(t)$ przedstawia pole „lewego ogona" rozkładu dla argumentów od $-\infty$ do t i jest stablicowana.

Tablice dystrybuanty

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

X – zmienna losowa, $f(x)$ – funkcja gęstości, $F_X(x)$ – dystrybuanta

$$X \sim N(0,1), \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

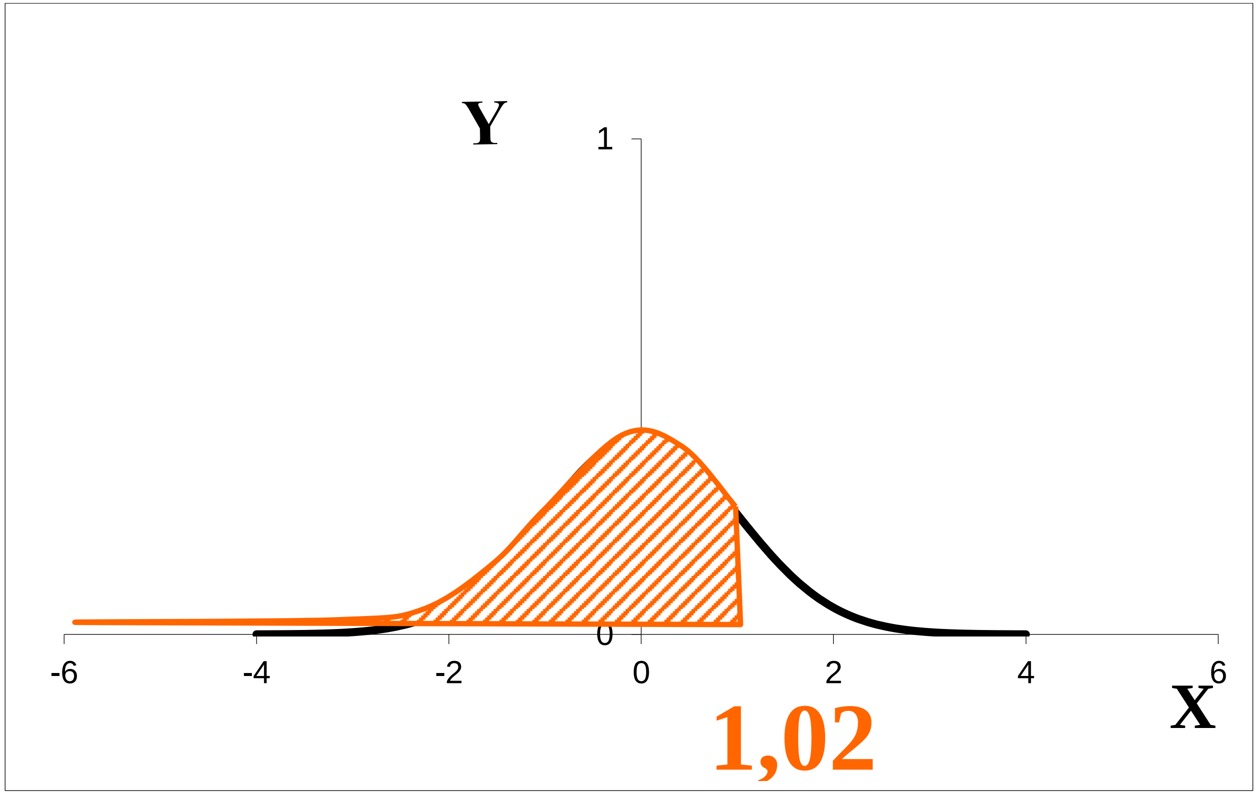
x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Odczytywanie z tablic

Przykład 1

Oblicz wartość dystrybuanty dla argumentu 1,02.

$$F(1{,}02) =$$



Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

X – zmienna losowa, $f(x)$ – funkcja gęstości, $F(t)$ – dystrybuanta X~N (0, 1), $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639
1,0	0,84134	0,84375	**0,84614**	0,84849	0,85083
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822

Odczytywanie z tablic cd.

$F(1{,}02) = 0{,}84614$

Przykład 2

Korzystając z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego wyznacz

$\boldsymbol{F(-1{,}02) =}$

Wzór

$$F(-a) = 1 - F(a), \quad a > 0$$

Wzór pozwala zapisać dystrybuantę dla argumentu ujemnego -*a* (której nie ma w tablicach) za pomocą dystrybuanty dla argumentu dodatniego *a*.

Przykład 2 cd.

$F(-1{,}02) = 1 - F(1{,}02) = \ldots$

Odczytujemy z tablic wartość dystrybuanty dla argumentu dodatniego 1,02.

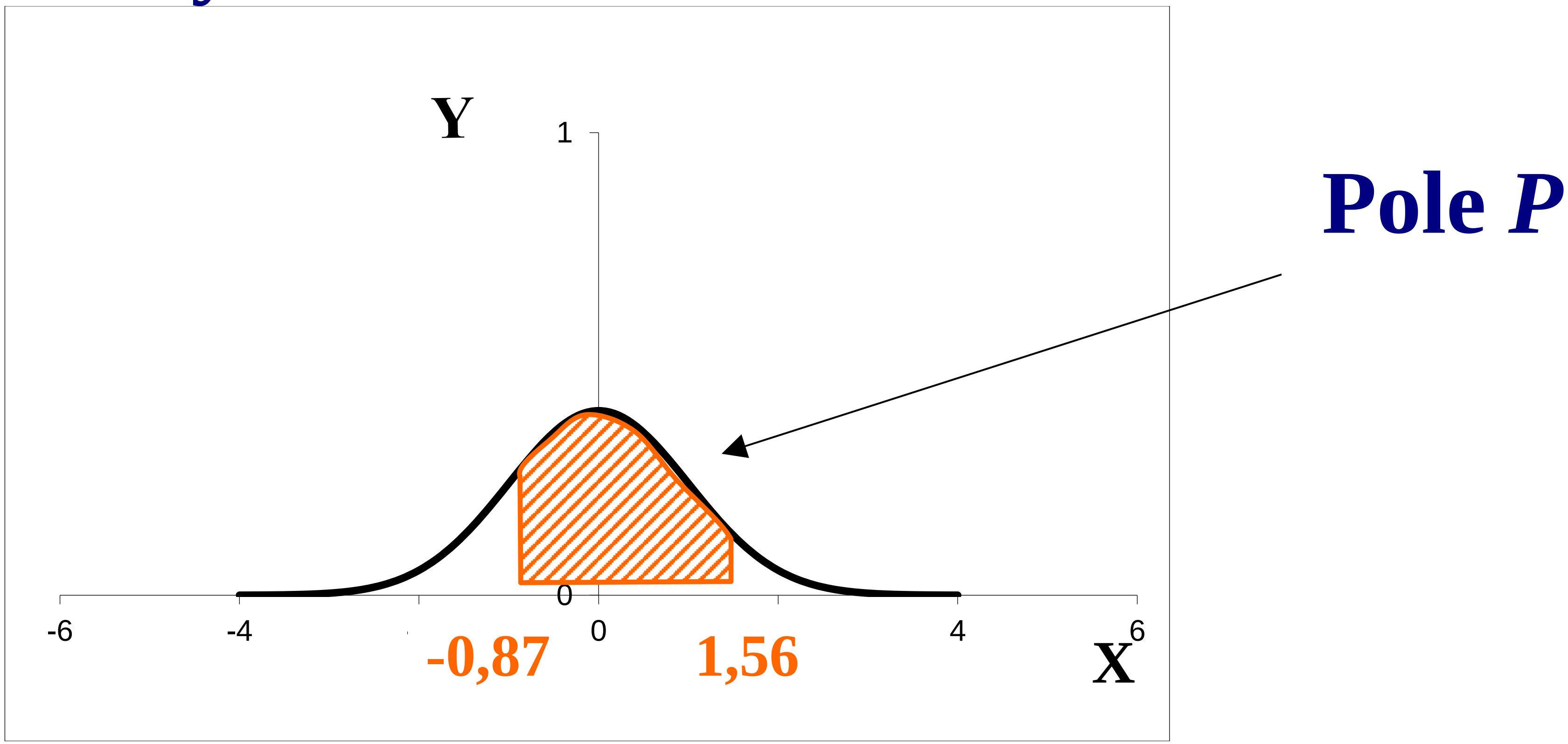
$F(-1{,}02) = 1 - F(1{,}02) = 1 - 0{,}84614 =$

$= 0{,}15386 \approx 0{,}15$

Obliczamy wartość wyrażenia.

Przykład 3

Korzystając z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego wyznacz pole obszaru pod krzywą Gaussa zaznaczone na rysunku.



Przykład 3 cd.

Pole zaznaczonego obszaru

$$P = F(1{,}56) - F(-0{,}87) =$$

$$= F(1{,}56) – [1 - F(0{,}87)] = \dots$$

Odczytujemy z tablic wartości dystrybuanty.

Przykład 3 cd.

$$P = F(1{,}56) - F(-0{,}87) =$$

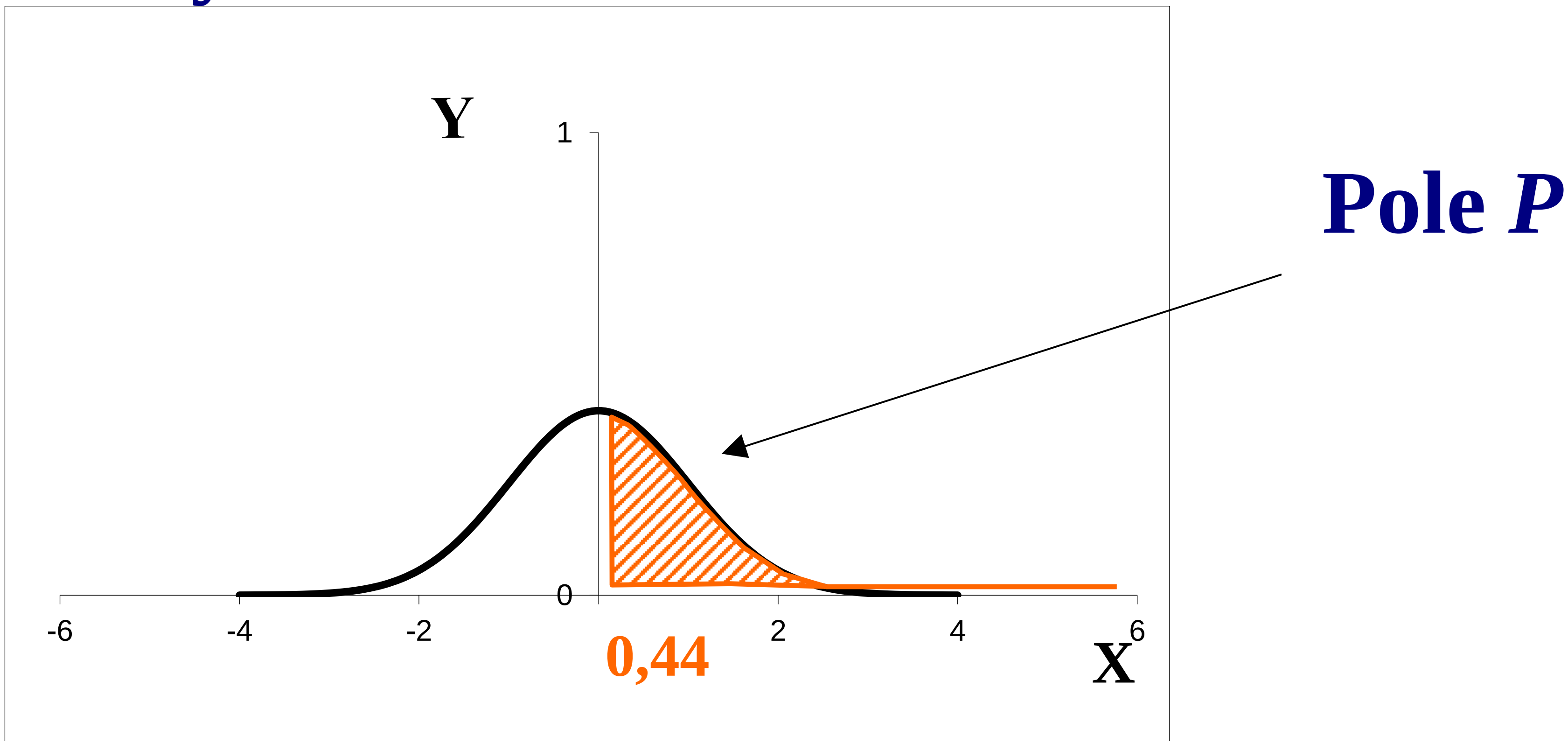
$$= F(1{,}56) – [1 - F(0{,}87)] =$$

$$= 0{,}94062 – [1 – 0{,}80785] =$$

$$= 0{,}94062 –1 + 0{,}80785 = 0{,}74847 \approx 0{,}75$$

Przykład 4

Korzystając z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego wyznacz pole obszaru pod krzywą Gaussa zaznaczone na rysunku



Przykład 4 cd.

Pole zaznaczonego obszaru

$P = 1 - F(0{,}44) = \ldots$

Odczytujemy z tablic wartość dystrybuanty.

Przykład 4 cd.

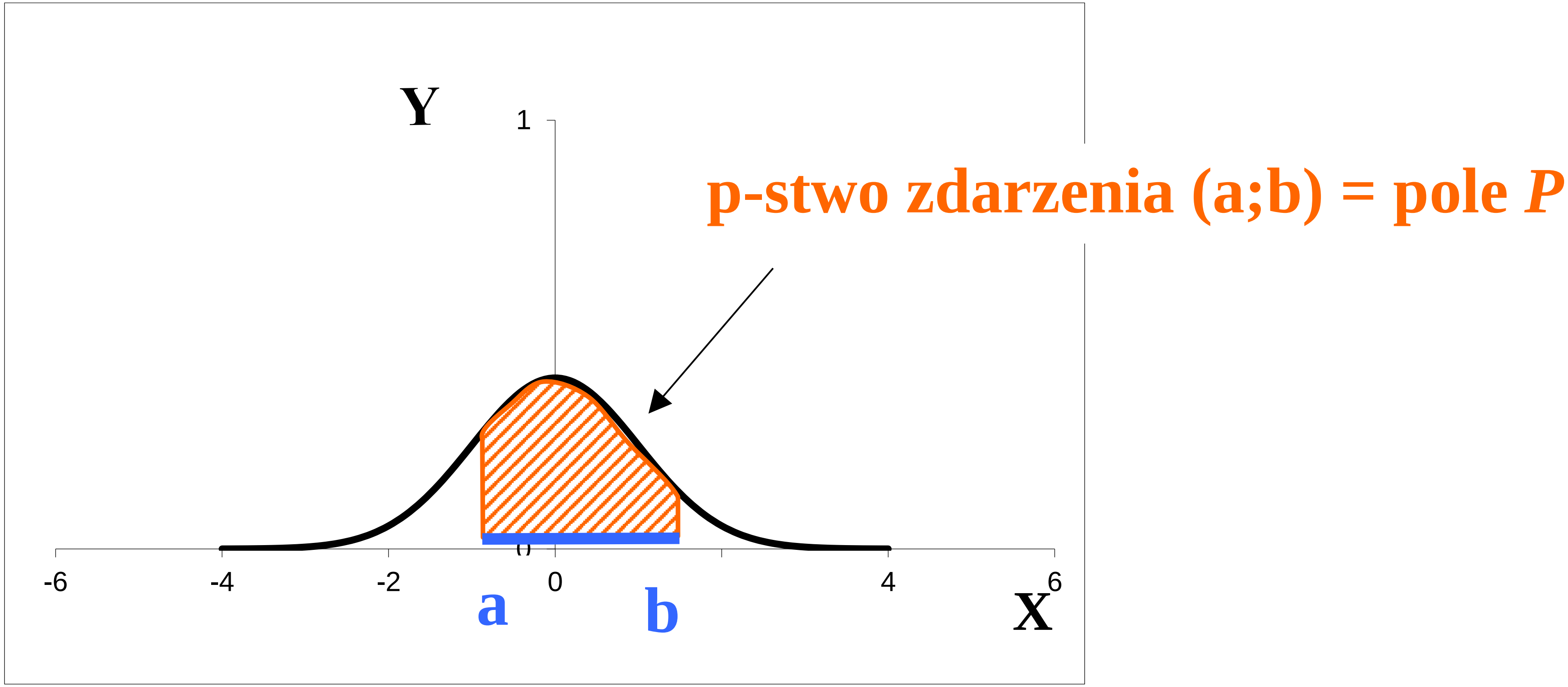
$$P = 1 - F(0{,}44) = 1 - 0{,}67003 =$$

$$= 0{,}32997 \approx 0{,}33$$

Interpretacja pola pod wykresem *fgp*

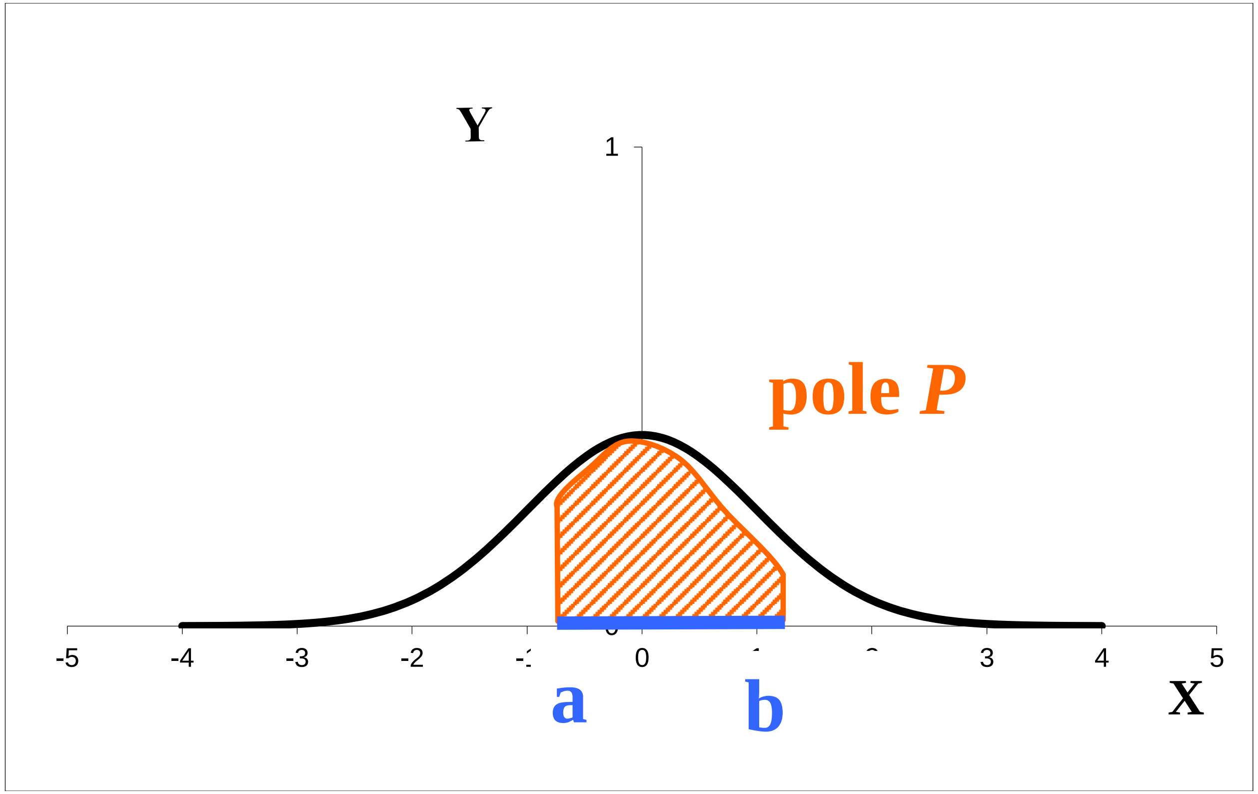
Pole obszaru pod wykresem funkcji gęstości (np. pod krzywą Gaussa) można interpretować jako prawdopodobieństwo zdarzenia losowego $P(A)$.

Interpretacja cd.



Przedział (a; b) – <u>zdarzenie losowe</u>,
pole nad tym przedziałem, ograniczone z góry krzywą Gaussa – <u>p-stwo tego zdarzenia losowego</u>.

Interpretacja cd.



$$Pole\ \ obszaru\ \ pod\ \ krzywą = \int_a^b f(x)\,dx$$

Interpretacja cd.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx - \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

Interpretacja cd.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx} - \boxed{\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx}$$

dystrybuanta w punkcie *b*, *F*(*b*)

dystrybuanta w punkcie *a*, *F*(*a*)

$F(b)$, $F(a)$ odczytujemy z tablic

Interpretacja cd.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx - \int_{-\infty}^a f(x)\,dx =$$

$$= F(b) - F(a)$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń losowych (z rozkładu normalnego) będziemy obliczać odczytując z tablic statystycznych wartości dystrybuanty.