# Temat wykładu:

# Pochodna funkcji.
# Zastosowania pochodnej.
# Badanie przebiegu zmienności

***Kody kolorów:***

***żółty – nowe pojęcie***
***pomarańczowy – uwaga***
***kursywa – komentarz***
**** – materiał nadobowiązkowy***

# Zagadnienia

1. **Pochodna**
2. **Zastosowanie pochodnej do badania monotoniczności funkcji**
3. **Wykrywanie ekstremów lokalnych**
4. **Granica funkcji – reguła de L'Hospitala**
5. **Badanie przebiegu zmienności funkcji**

# * Pochodna funkcji - idea

# * Pochodna funkcji - idea

**Niech**

$$f : D \to R, \qquad x_0 \in D, \qquad y = f(x),$$

**Rozpatrujemy:**

*ciąg argumentów* $\quad x_n \to x_0$

*ciąg wartości* $\quad f(x_n)$

*ciąg ilorazów różnicowych* $\quad \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

*granicę tego ciągu ...*

# * Pochodna funkcji – definicja

**Niech** $f: D \to R$, $x_0 \in D$, $(x_n)$ **– taki ciąg, że** $x_n \in D$ **dla każdego** $n \in N^+$ **oraz** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

**Jeżeli istnieje skończona granica ciągu ilorazów różnicowych** $\lim\limits_{x_n \to x_0} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

**niezależna od wyboru ciągu** $(x_n)$, **to nazywamy ją pochodną funkcji** $f$ **w punkcie** $x_0$ **i piszemy**

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

# Uwaga 1

***Z tej definicji oraz twierdzeń opisujących własności pochodnej wyprowadza się wzory na pochodne funkcji elementarnych podane dalej.***

# Uwaga 2

***Pochodna funkcji jest również pewną funkcją. Niżej podano przykłady zapisu pochodnej.***

| **wzór funkcji** | **wzór pochodnej** |
|---|---|
| $f(x) = x^2 + 1$ | $f'(x) = 2x$ |
| $g(x) = e^x$ | $g'(x) = e^x$ |
| $h(x) = 5$ | $h'(x) = 0$ |

# Pochodna funkcji - terminologia

**Obliczanie pochodnej funkcji *f* nazywa się różniczkowaniem funkcji *f*.**

# Wzory na pochodne funkcji

**Funkcja stała:** $f(x) = c$

**Pochodna funkcji stałej:** $f'(x) = 0$

***Konwencja zapisu:***

**Pochodna funkcji stałej**

$$(c)' = 0 \qquad (1)$$

# Wzory na pochodne funkcji cd.

## Pochodna funkcji potęgowej

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \qquad (2)$$

$\alpha$ - stała, $\alpha \in R$

---

## Pochodna funkcji wykładniczej

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a \qquad (3)$$

$a$ – stała, $a > 0$

---

## Pochodna funkcji logarytmicznej

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (4)$$

$a$ - stała, $a > 0$, $a \neq 1$

# Reguły różniczkowania

$$\left[a \cdot f(x)\right]' = a \cdot f'(x)$$, $a$ – stała, $a \in R$ (5)

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (6)$$

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad (7)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \qquad (8)$$

$$\left\{g\left[f(x)\right]\right\}' = g'\left[f(x)\right] \cdot f'(x) \qquad (9)$$

# Terminologia – uwaga

$$f: \ (a; b) \to R$$

**Dziedzina $D_f = (a; b)$, zbiór wartości $Y_W \subset R$**

**Mówimy: funkcja *f* określona na przedziale ($a$ ; $b$) o wartościach rzeczywistych**

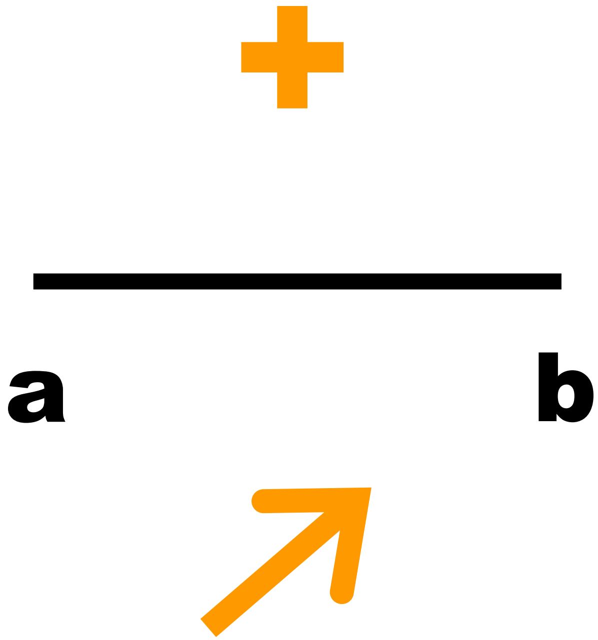
**Jeżeli $f : (a; b) \to R$ i w każdym punkcie**

**$x \in (a; b)$ istnieje pochodna funkcji $f'(x)$, to**

**mówimy: funkcja *f* jest różniczkowalna (gładka) na przedziale ($a$ ; $b$).**

# Badanie monotoniczności

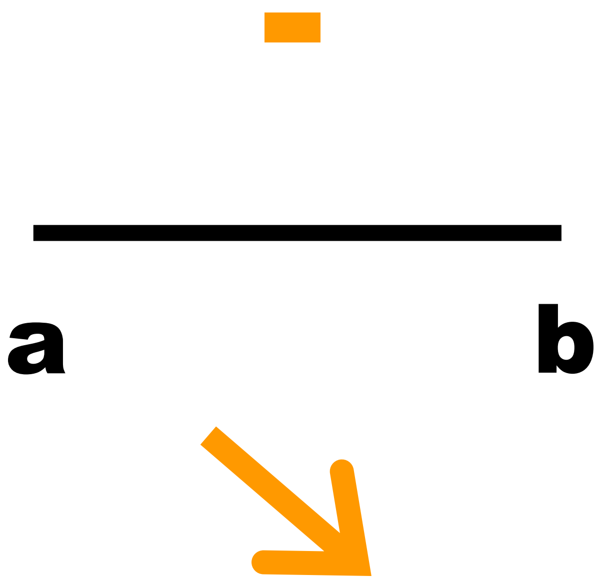
# Diagram 1




**znak pochodnej $f'$**

**monotoniczność funkcji $f$**

# Diagram 2




znak
pochodnej $f'$

monotoniczność
funkcji $f$

# Diagram 3

**0**

**a** **b**

**funkcja stała**

**znak pochodnej $f'$**

**monotoniczność funkcji $f$**

# Twierdzenie

**Dana jest funkcja $f:(a;b)\to R$**

**różniczkowalna na przedziale $(a;b)$.**

**Jeśli**

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)>0,\quad \text{to}\quad f\uparrow\quad \text{na}\ (a;b)$$

**Jeśli**

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)<0,\quad \text{to}\quad f\downarrow\quad \text{na}\ (a;b)$$

**Jeśli**

$$\forall x\in(a;b)\quad f'(x)=0,\quad \text{to}\quad f\quad \text{stala na}\ (a;b)$$

# Przykład

**<u>Zadanie</u>. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności funkcji**

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

# Przykład

**Zadanie.** **Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności funkcji**

$$f(x)=\frac{x}{e^{x}}$$

## Odpowiedzi

$$D=R$$

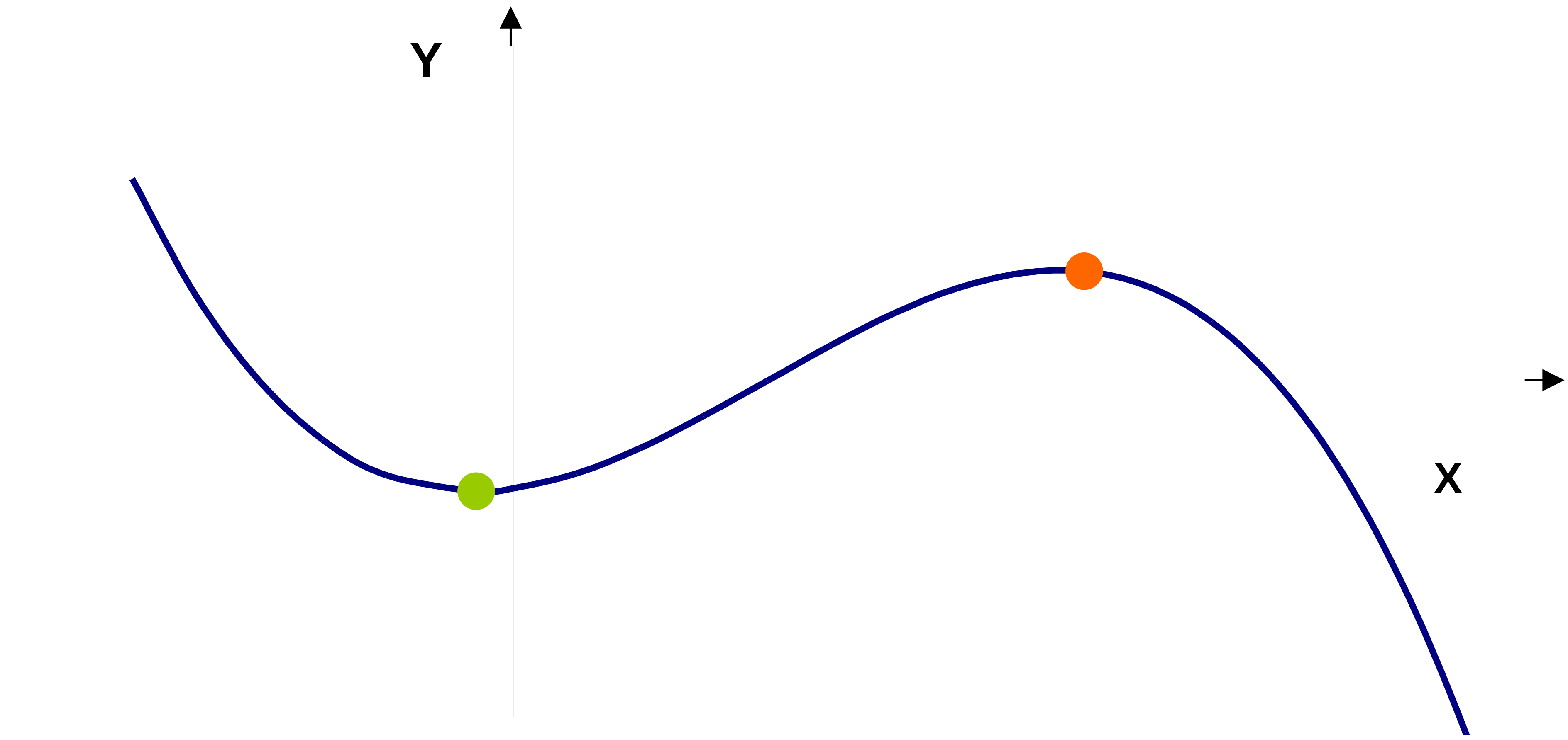
$$f(x)\uparrow \quad \text{dla} \quad x\in(-\infty\,;1)$$

$$f(x)\downarrow \quad \text{dla} \quad x\in(1\,;+\infty)$$

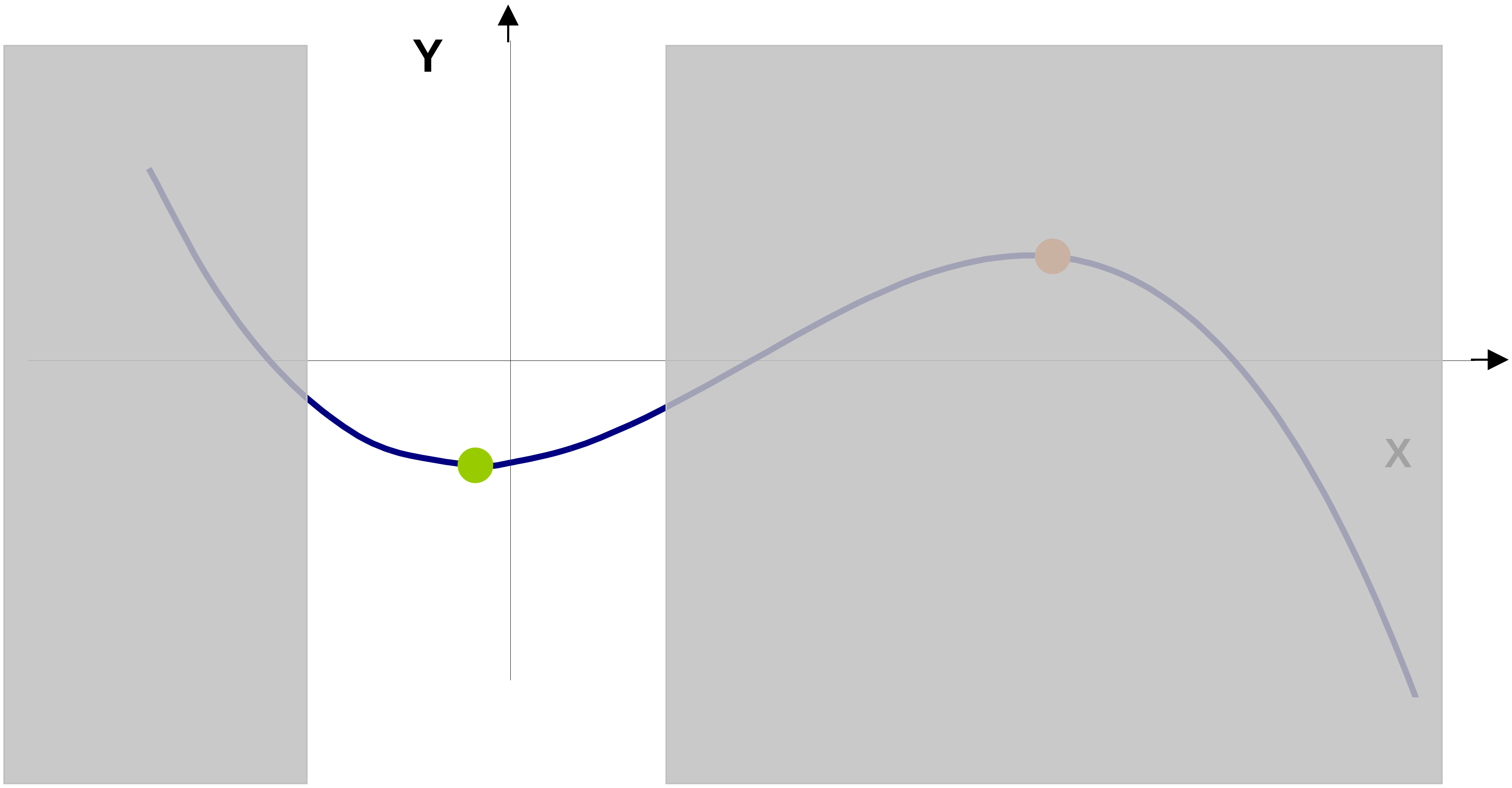
# Ekstrema lokalne

# Ekstrema lokalne - idea

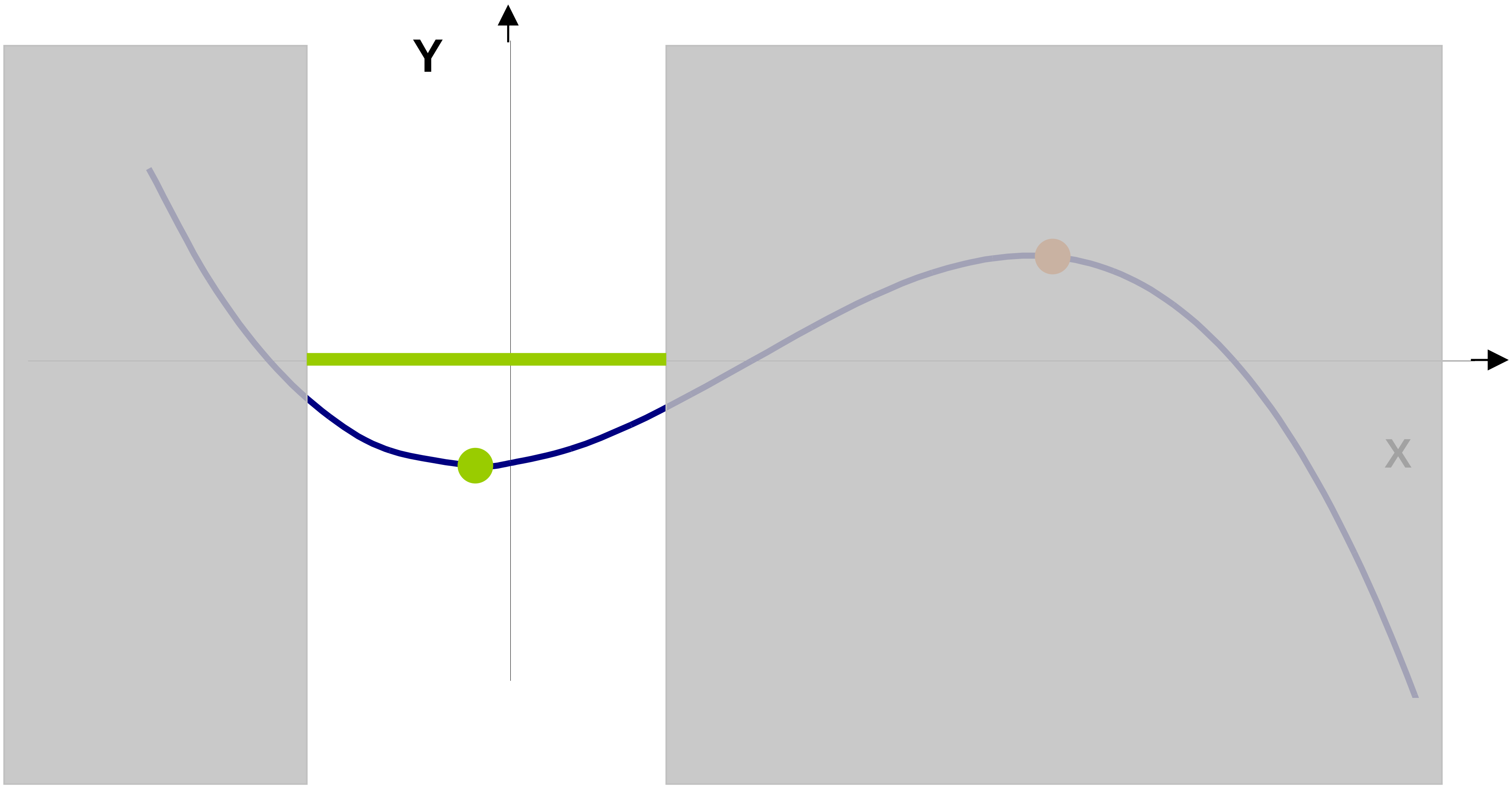
## Ekstrema lokalne: minimum, maksimum



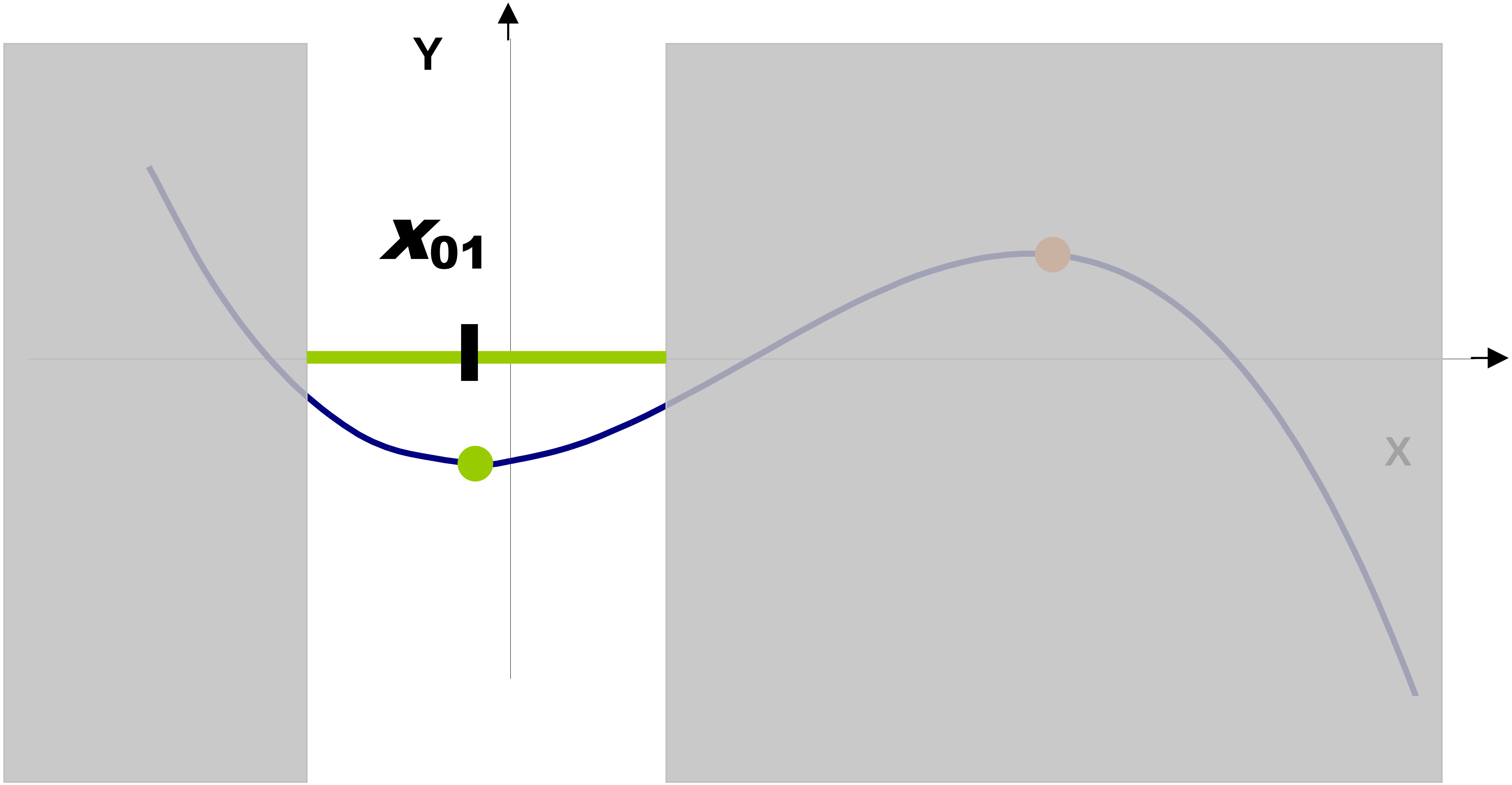
# Minimum lokalne



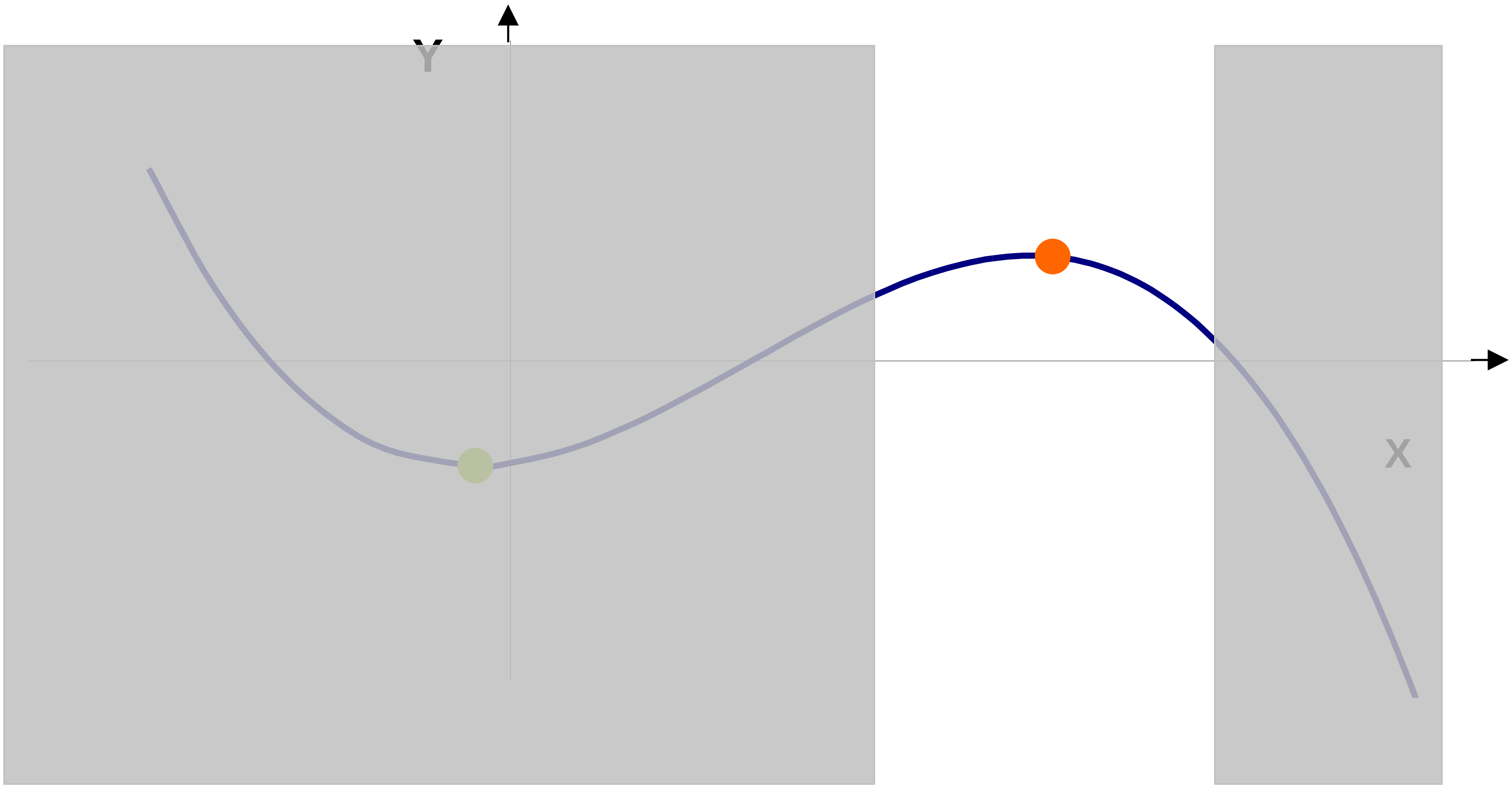
# Minimum lokalne cd.



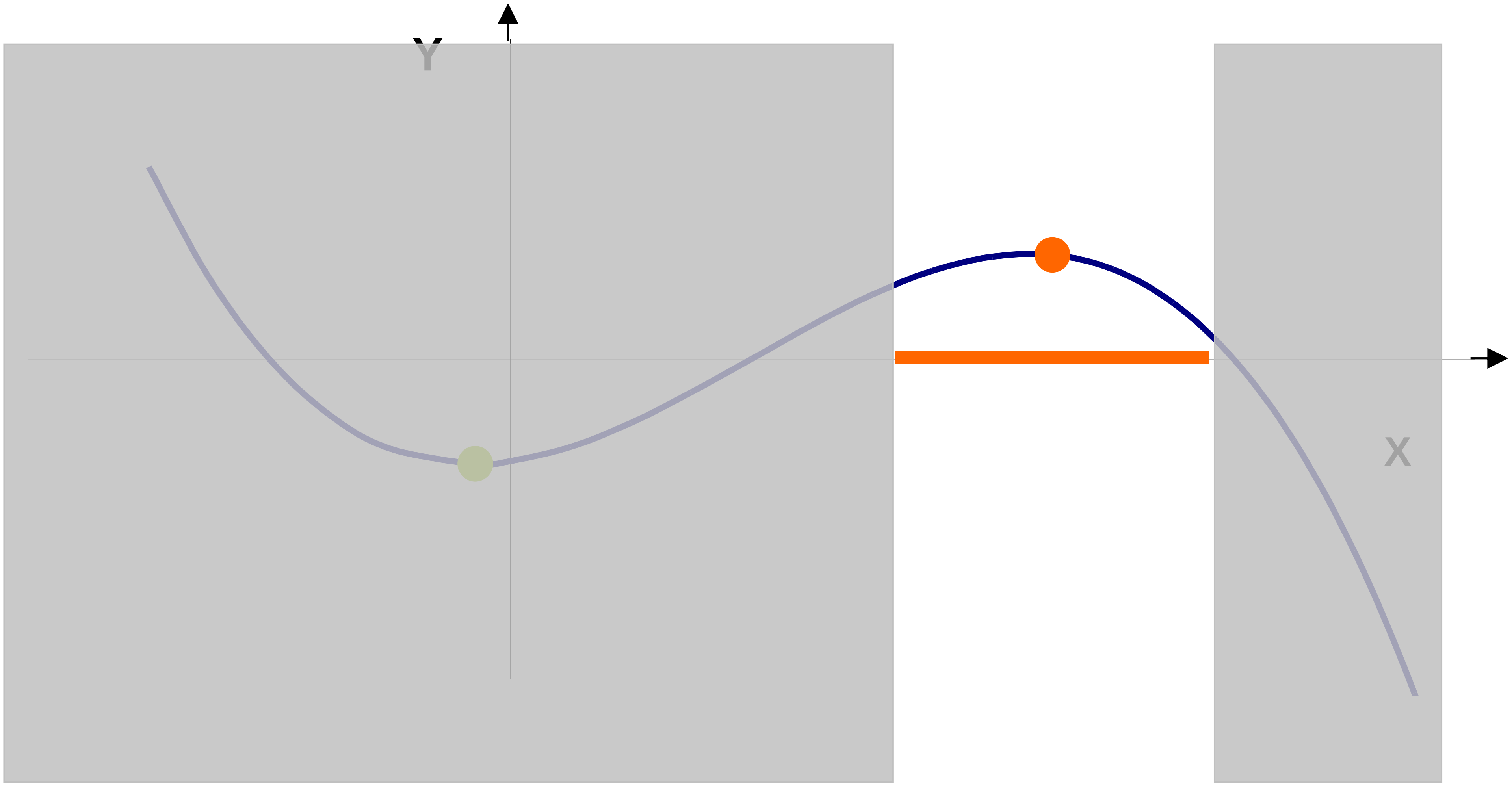
# Minimum lokalne cd.



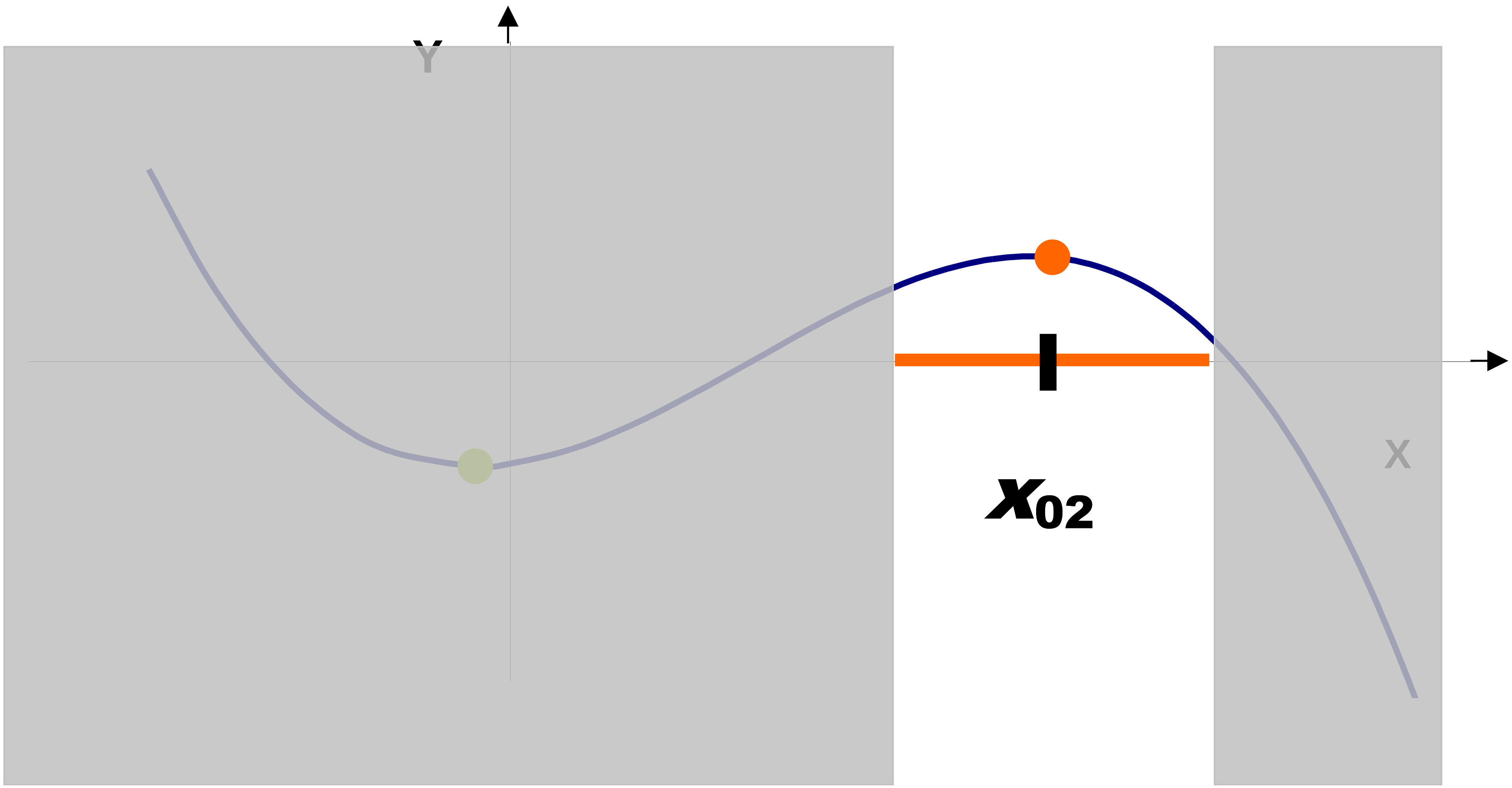
# Maksimum lokalne



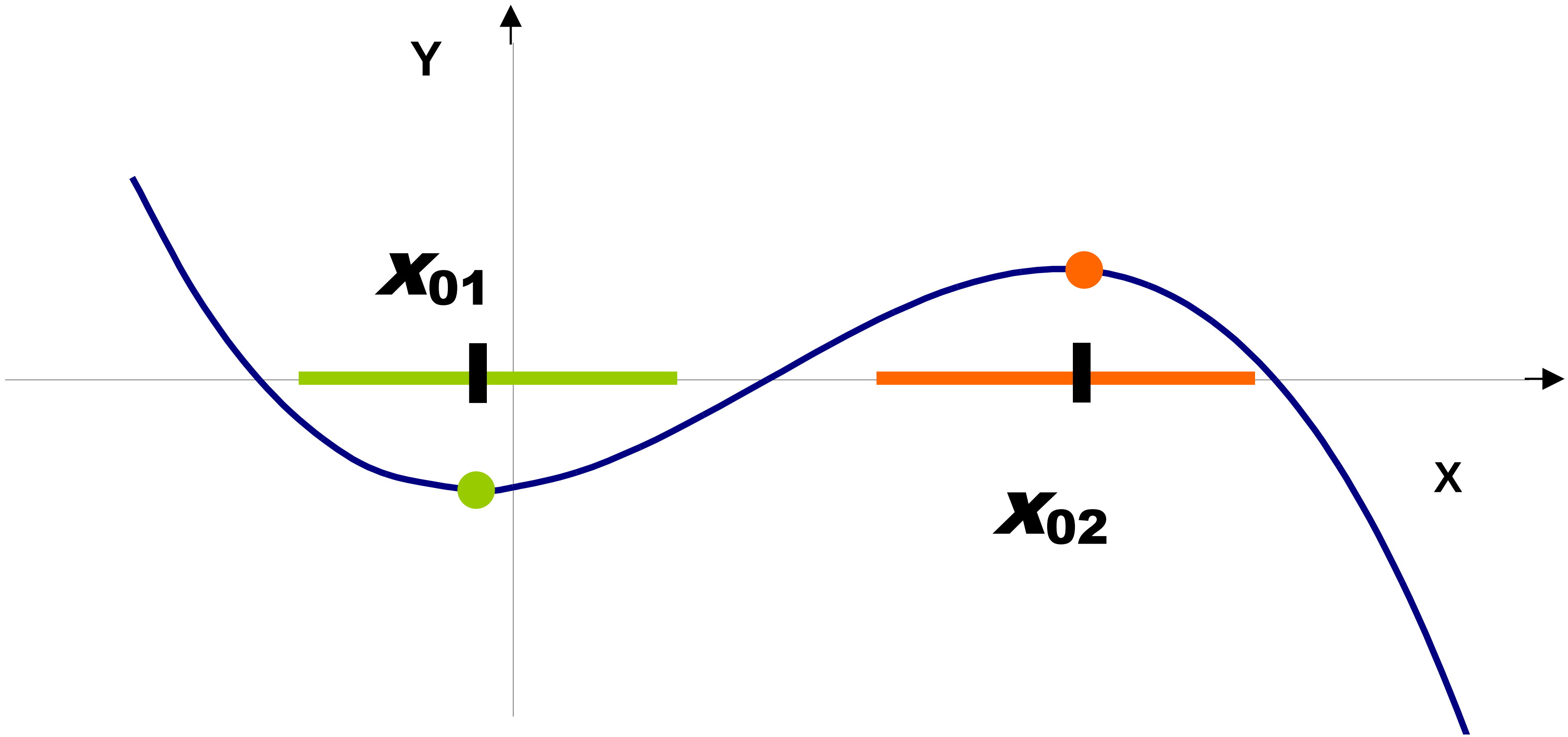
# Maksimum lokalne cd.



# Maksimum lokalne cd.



# Ekstrema lokalne



# *Definicje ekstremów lokalnych

**Funkcja $f:(a;b)\to R$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0\in(a;b)$, gdy istnieje taki przedział $(x_0-r\,;\,x_0+r)$ zawarty w dziedzinie, że wartość $f(x_0)$ jest najmniejsza ze wszystkich wartości funkcji w tym przedziale.**

**Funkcja $f:(a;b)\to R$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0\in(a;b)$, gdy istnieje taki przedział $(x_0-r\,;\,x_0+r)$ zawarty w dziedzinie, że wartość $f(x_0)$ jest największa ze wszystkich wartości funkcji w tym przedziale.**

# Wykrywanie ekstremów lokalnych

# Twierdzenie

**Niech funkcja $f:(a;b)\rightarrow R$ będzie różniczkowalna na przedziale ($a$ ; $b$). Jeśli $f$ posiada ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$ to $f'(x_0) = 0$.**

## Wniosek z tw. 2

**Warunek $f'(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego w punkcie $x_0$. Nie jest jednak warunkiem dostatecznym.**

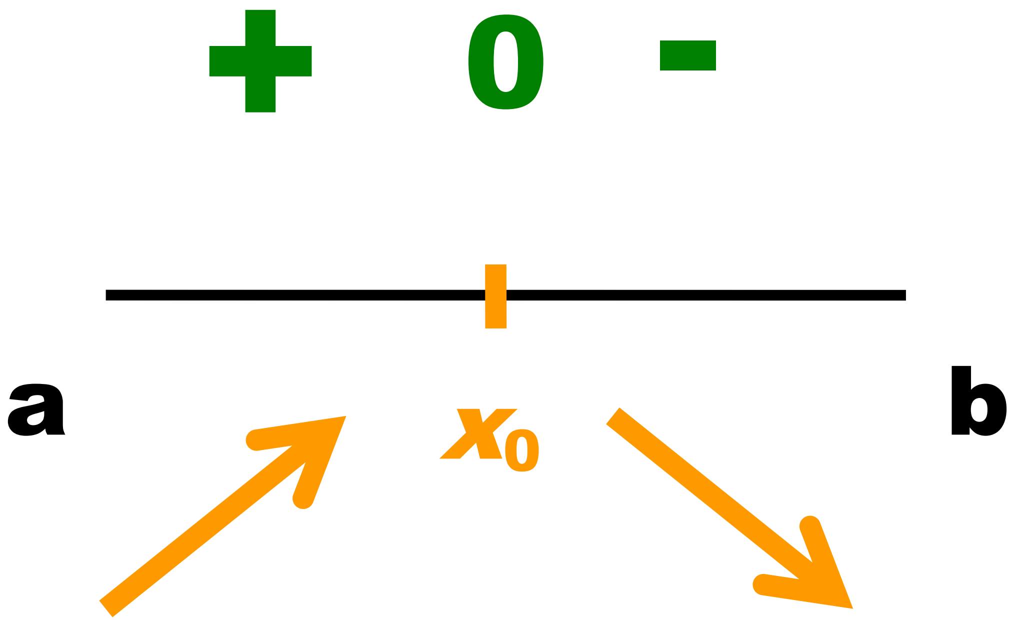
# Wykrywanie maksimum lokalnego

+ 0 -

znaki $f'$

a $x_0$ b

# Wykrywanie maksimum lok. cd.




znaki $f'$

monotoniczność $f$

**maksimum lokalne w $x_0$**

# Twierdzenie

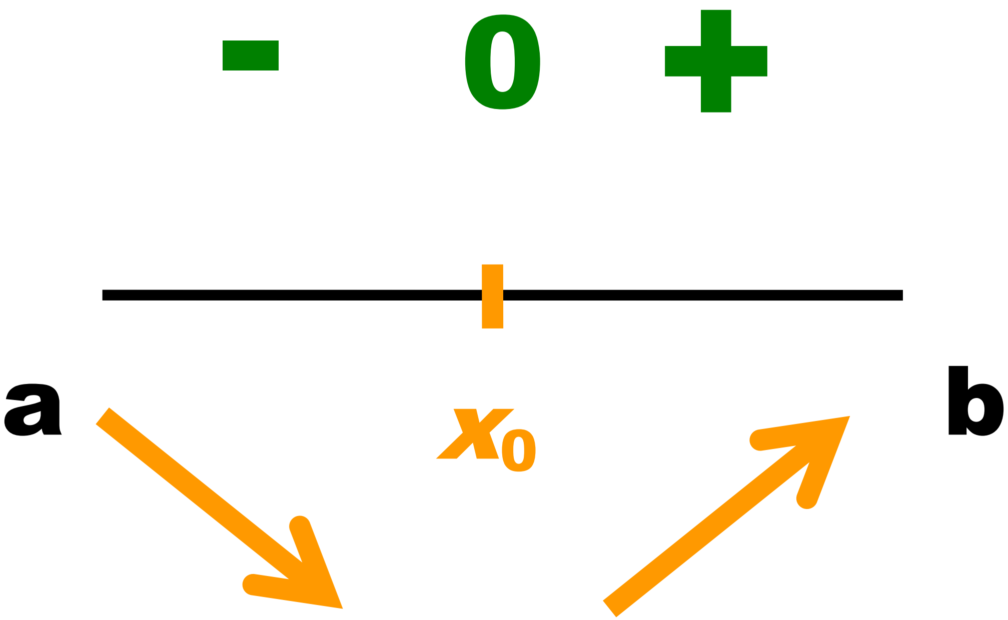
**Jeśli funkcja $f:(a,b)\to R$ jest różniczkowalna na przedziale (a,b) i dla pewnego $x_0\in(a,b)$ zachodzi $f'(x_0)=0$ oraz istnieje taki przedział $(x_0-r\,;\,x_0+r)$ należący do dziedziny, że dla $x\in(x_0-r, x_0)$ $f'(x)>0$ oraz dla $x\in(x_0, x_0+r)$ $f'(x) < 0$, to funkcja f ma w punkcie $x_0$ maksimum lokalne.**

# Wykrywanie minimum lokalnego

**-  0  +**  znaki $f'$

a  $x_0$  b

# Wykrywanie minimum lok. cd.




znaki $f'$

monotoniczność $f$

**minimum lokalne w $x_0$**

# Twierdzenie

**Jeśli funkcja $\mathbf{f:(a,b)\to R}$ jest różniczkowalna na przedziale (a,b) i dla pewnego $\mathbf{x_0 \in (a,b)}$ zachodzi $f'(x_0) = 0$ oraz istnieje taki przedział $(x_0 - r\ ;\ x_0 + r)$ należący do dziedziny, że dla $\mathbf{x \in (x_0 - r, x_0)}$ $f'(x)<0$ oraz dla $\mathbf{x \in (x_0, x_0 + r)}$ $f'(x) > 0$, to funkcja f ma w punkcie $x_0$ minimum lokalne.**

# Przykład

**Zad. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji**

$$f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad x \in R$$

## Rozwiązanie

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

# Odpowiedź

**znaki $f'$:** + 0 -

**monotoniczność $f$:** ↗ $x_0=1$ ↘

**maksimum lokalne**

Funkcja $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ jest:

$$f\uparrow dla\, x<1, \quad f\downarrow dla\, x>1.$$

Dla $x$=1 przyjmuje maksimum lokalne o wartości

$$y_{\max} = f(1)=\frac{1}{e}.$$

# Reguła de L'Hospitala

**Tw 5**. Jeśli w wyrażeniu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, iloraz funkcji jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ oraz istnieje granica ilorazu pochodnych tych funkcji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Uwaga**. Tw. 5 jest prawdziwe dla $x_0$ skończonych oraz dla $x_0 = \pm\infty$, a także dla granic jednostronnych.

# Przykład

**Zadanie.** **Oblicz granicę**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

# Przykład

**Zadanie. Oblicz granicę**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

**Rozwiązanie**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

# Badanie przebiegu zmienności

# Badanie przebiegu zmienności

**Zadanie.** Dla funkcji danej wzorem $y = f(x)$ wyznacz:

1. dziedzinę
2. punkty wspólne wykresu z osiami OX, OY
3. granice oraz asymptoty
4. pochodną $f'(x)$ oraz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne
5. zestaw wyniki w tabeli
6. naszkicuj wykres

# Przykład 1

**Zadanie. Wykonaj badanie przebiegu zmienności funkcji**

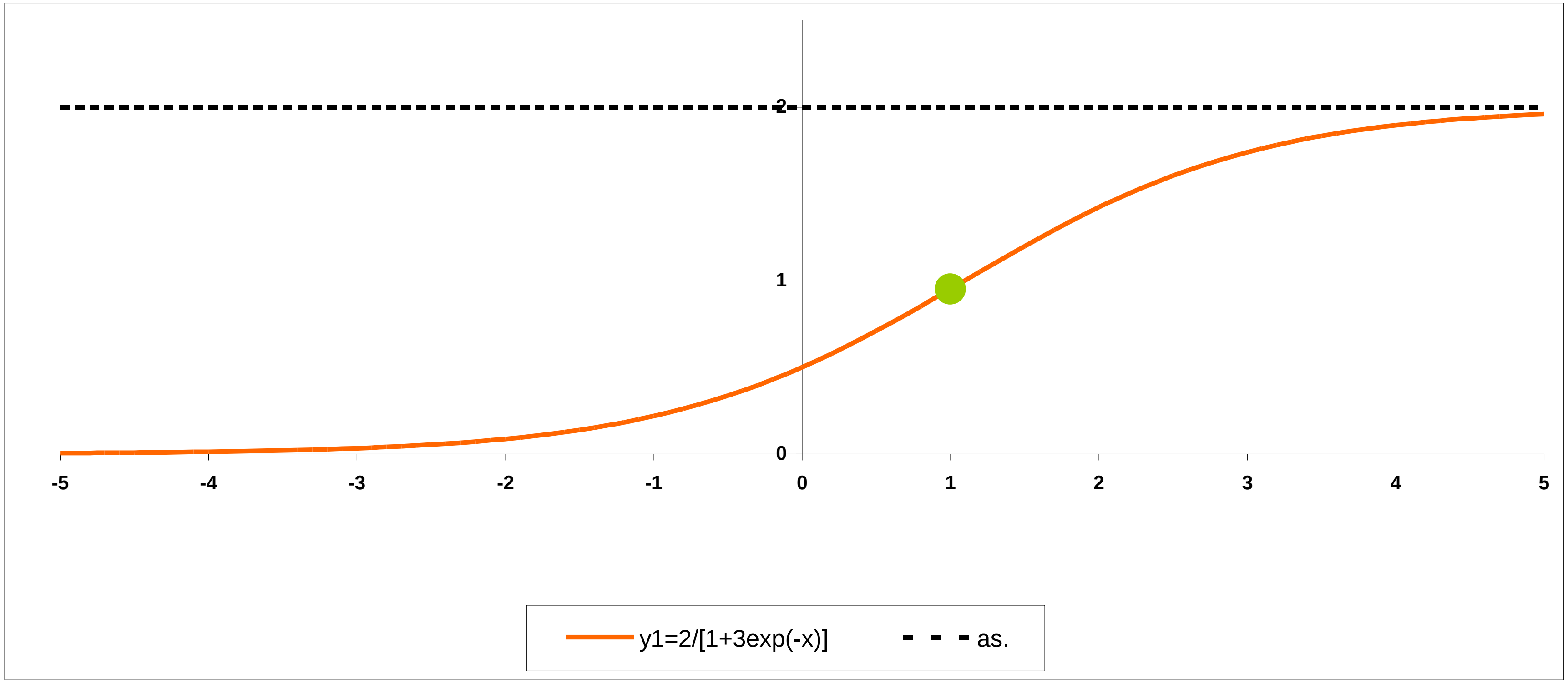
$$f(x) = \frac{2}{1+3e^{-x}}$$

**Na tablicy**

# Przykład 1

## Funkcja logistyczna

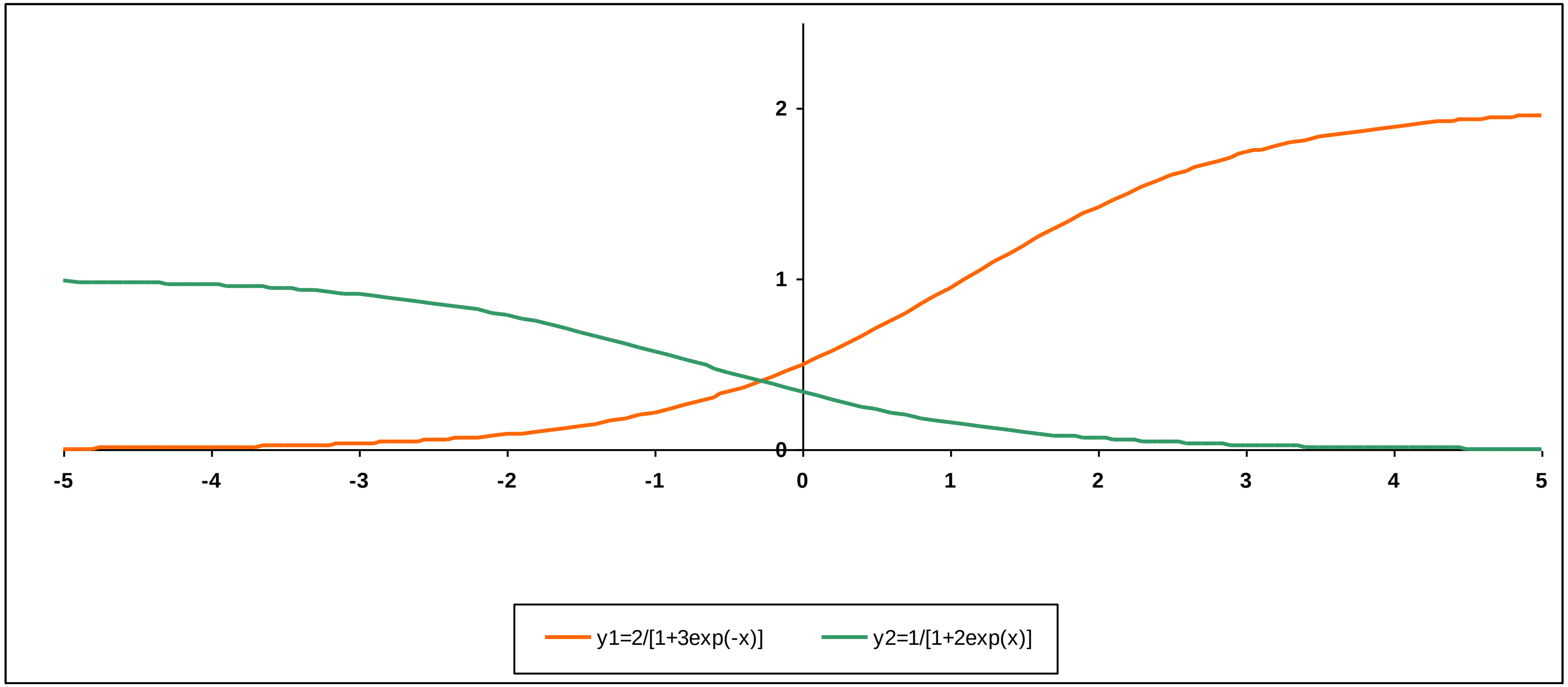
$$f(x) = \frac{2}{1+3e^{-x}}$$



# Przykład 2

## Funkcja logistyczna

$$f(x)=\frac{a}{1+be^{-cx}}$$



# Przykład 3

**<u>Zadanie</u>. Wykonaj badanie przebiegu zmienności funkcji**

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

# 1. Dziedzina

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$D = R$$

# 2. Punkty wspólne z osiami

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

**z OX:**

$$A(0, 0)$$

**z OY:**

*ten sam*

# 3. Granice i asymptoty

$$f(x)=\frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{H}{=}0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$$

**$y = 0$ as. pozioma prawostronna**

# 4. Pochodna i wnioski

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{(1-x)}{e^x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

# 4. Pochodna i wnioski cd.

znaki f': $+ \quad 0 \quad -$

monotoniczność f: $\nearrow \quad x_0=1 \quad \searrow$

maksimum lokalne

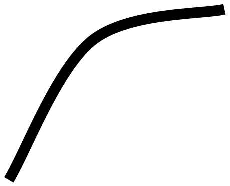
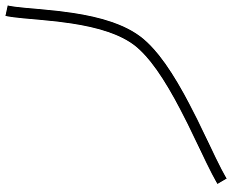
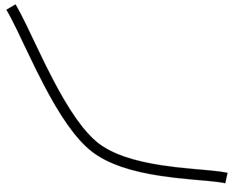
Funkcja $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ jest

$$f \uparrow \ dla \ x < 1, \quad f \downarrow \ dla \ x > 1,$$

dla x=1 przyjmuje maksimum lokalne

o wartości $y_{max} = f(1) = \dfrac{1}{e}$.

# 5. Tabela

| $x$ | $(-\infty ; 1)$ | $1$ | $(1 ; 2)$ | $2$ | $(2 ; +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - |
| $f(x)$ |  $-\infty$ | $y_{max}$ $=1/e$ |  | pp |  0 |

$y=0$ as. pion. prawostr.

# 6. Wykres