Temat wykładu:

Funkcja. Granica funkcji. Asymptoty

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie

pomarańczowy – uwaga

kursywa – komentarz

**** – materiał nadobowiązkowy***

Zagadnienia

1. **Przypomnienie: funkcja, argument, wartość, dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe, wykres, monotoniczność, ekstremum (globalne)**

2. **Granica funkcji**

3. **Asymptoty funkcji**

Funkcja

Definicja. **Niech** $X \subset R$, $Y \subset R$.

Funkcją f **określoną na zbiorze** X **o wartościach ze zbioru** Y **nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie** $x \in X$ **dokładnie jednej liczby** $y \in Y$**.**

Ozn.: $$f : X \to Y$$

Funkcja – terminologia

$$f : X \to Y \qquad x \xrightarrow{f} y \qquad y = f(x)$$

x – **argument** funkcji, $x \in X$

X – **dziedzina** funkcji

D, D_f – oznaczenie dziedziny funkcji f, w tym kursie przyjmujemy, że $D \subset R$.

$y = f(x)$ – **wartość** funkcji

$$\{\, y \in Y : \textit{istnieje} \quad x \in X \textit{ takie , że } \; y = f(x) \,\} = Y_w$$

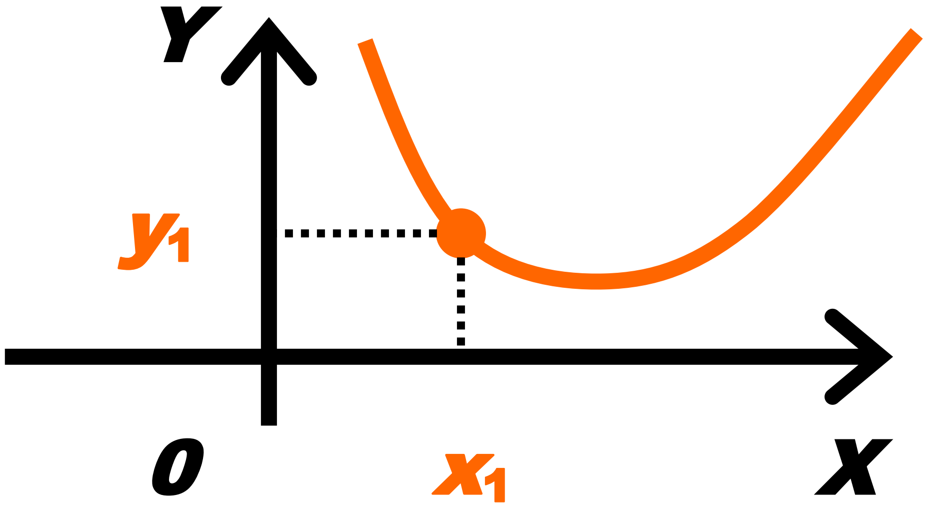
Y_w – **zbiór wartości** funkcji $\quad Y_w \subset Y$

Sposoby przedstawienia funkcji

tabelka

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

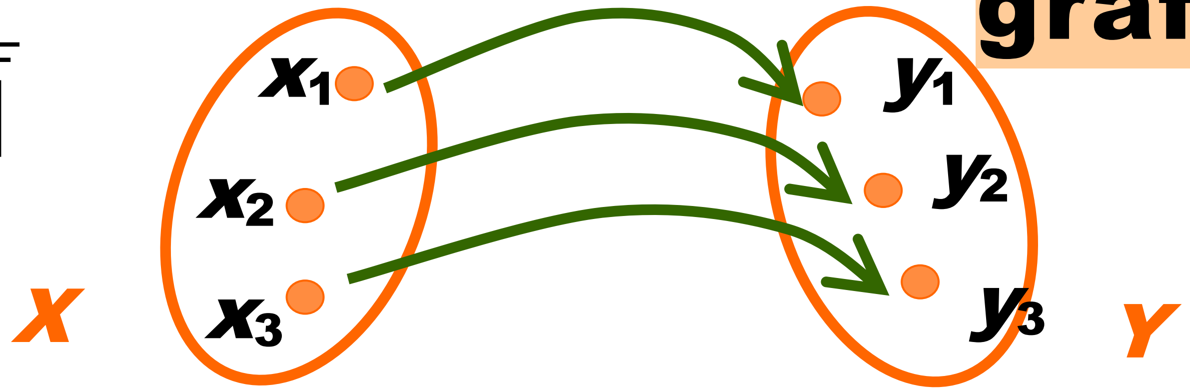
wykres



wzór

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

graf



Wykres funkcji

Wykres funkcji rysujemy w układzie współrzędnych kartezjańskich *XOY*.

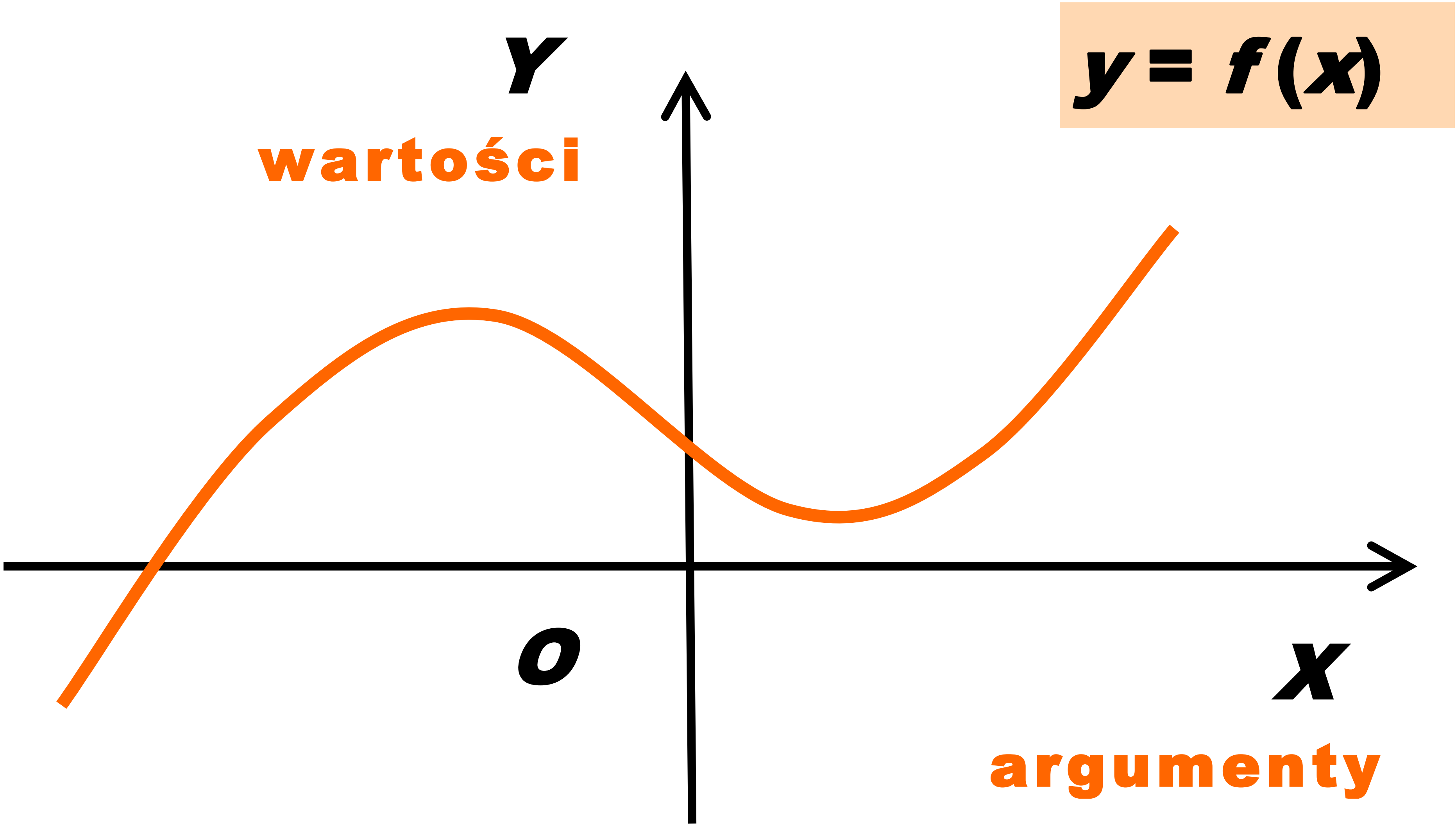
Układ tworzą osie liczbowe:

pozioma $\overrightarrow{OX}$ **- oś odciętych**

pionowa $\overrightarrow{OY}$ **- oś rzędnych**

<u>Definicja</u>. Jeśli funkcja $f : X \to Y$ **dana jest wzorem** $y = f(x)$**, to wykresem funkcji w układzie *XOY* jest zbiór wszystkich punktów o współrzędnych (*x*, *y*) takich, że *x* jest argumentem funkcji, a *y* jest wartością funkcji dla argumentu *x* (*y* = *f*(*x*)).**

Wykres funkcji

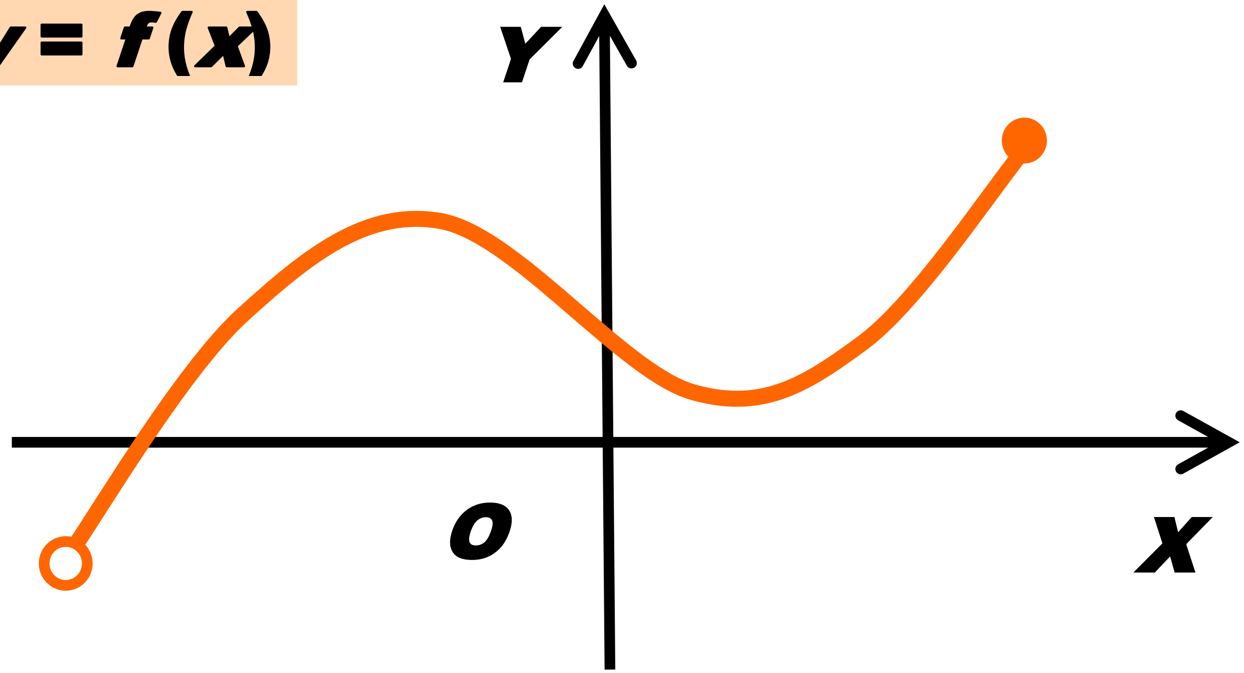


Wykres funkcji – umowa

Na wykresie funkcji:

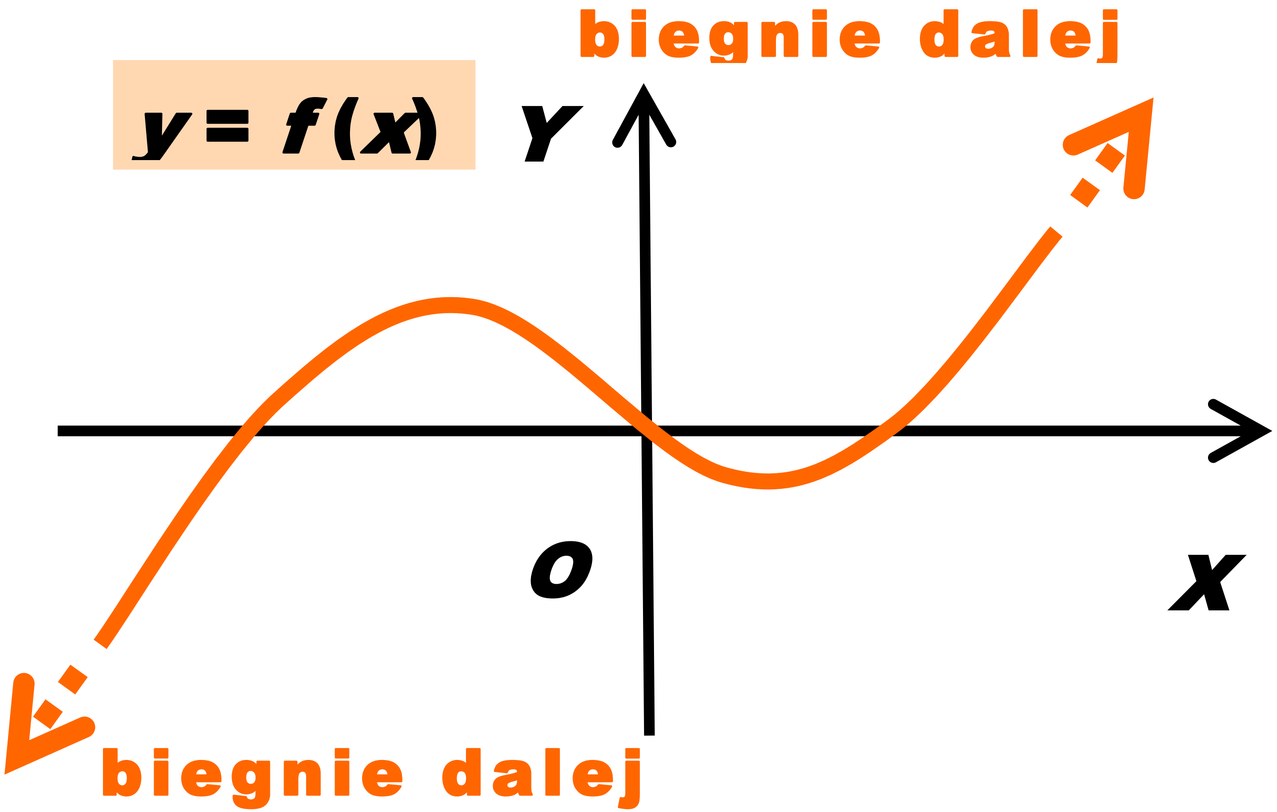
- **punkt zaznaczony kropką należy do wykresu,**
- **punkt zaznaczony pustym kółkiem nie należy do wykresu.**

$y = f(x)$



Wykres funkcji – umowa cd.

Gdy na rysunku wykres nie jest zakończony ani kropką, ani pustym kółkiem oznacza to, że biegnie dalej.



Dziedzina funkcji - umowa

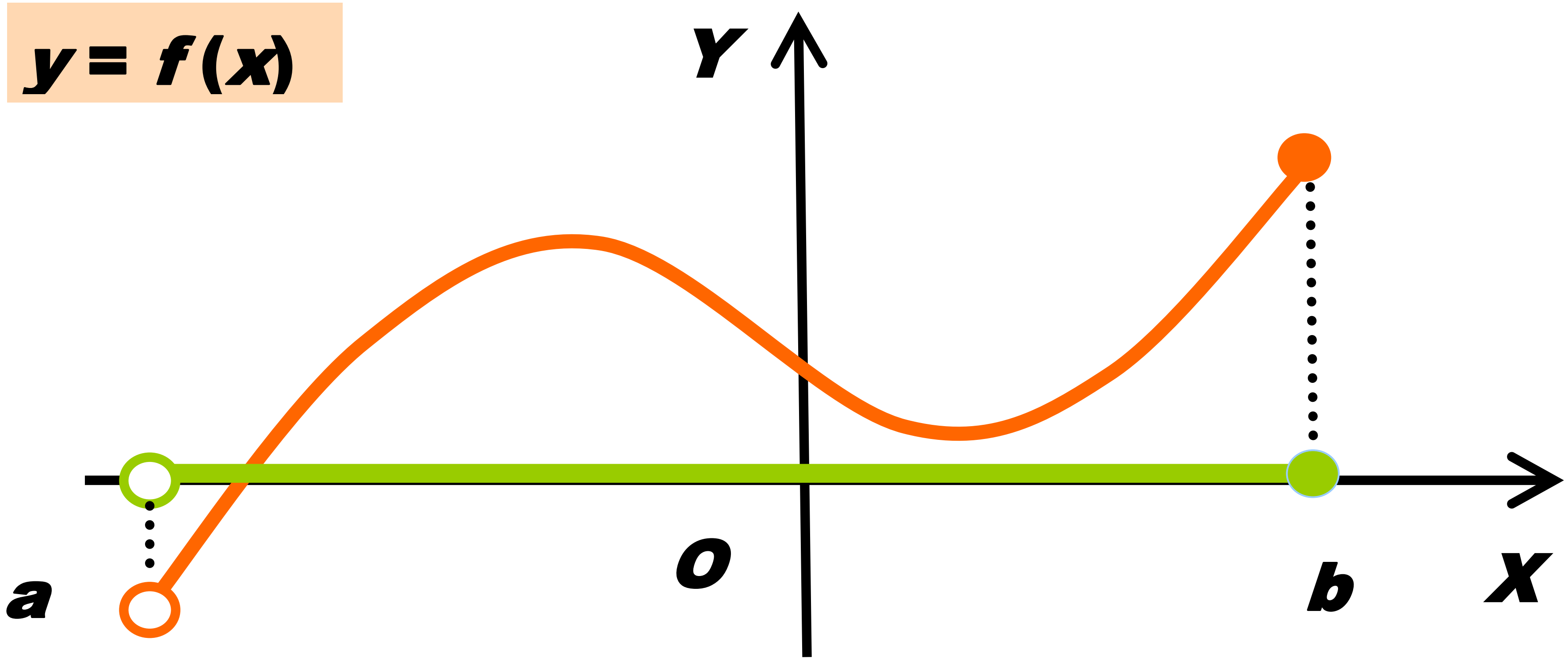
Jeśli funkcja dana jest wzorem, to do jej dziedziny należą wszystkie liczby, dla których wzór funkcyjny ma sens.

Przykład. Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

Dziedzina funkcji na wykresie

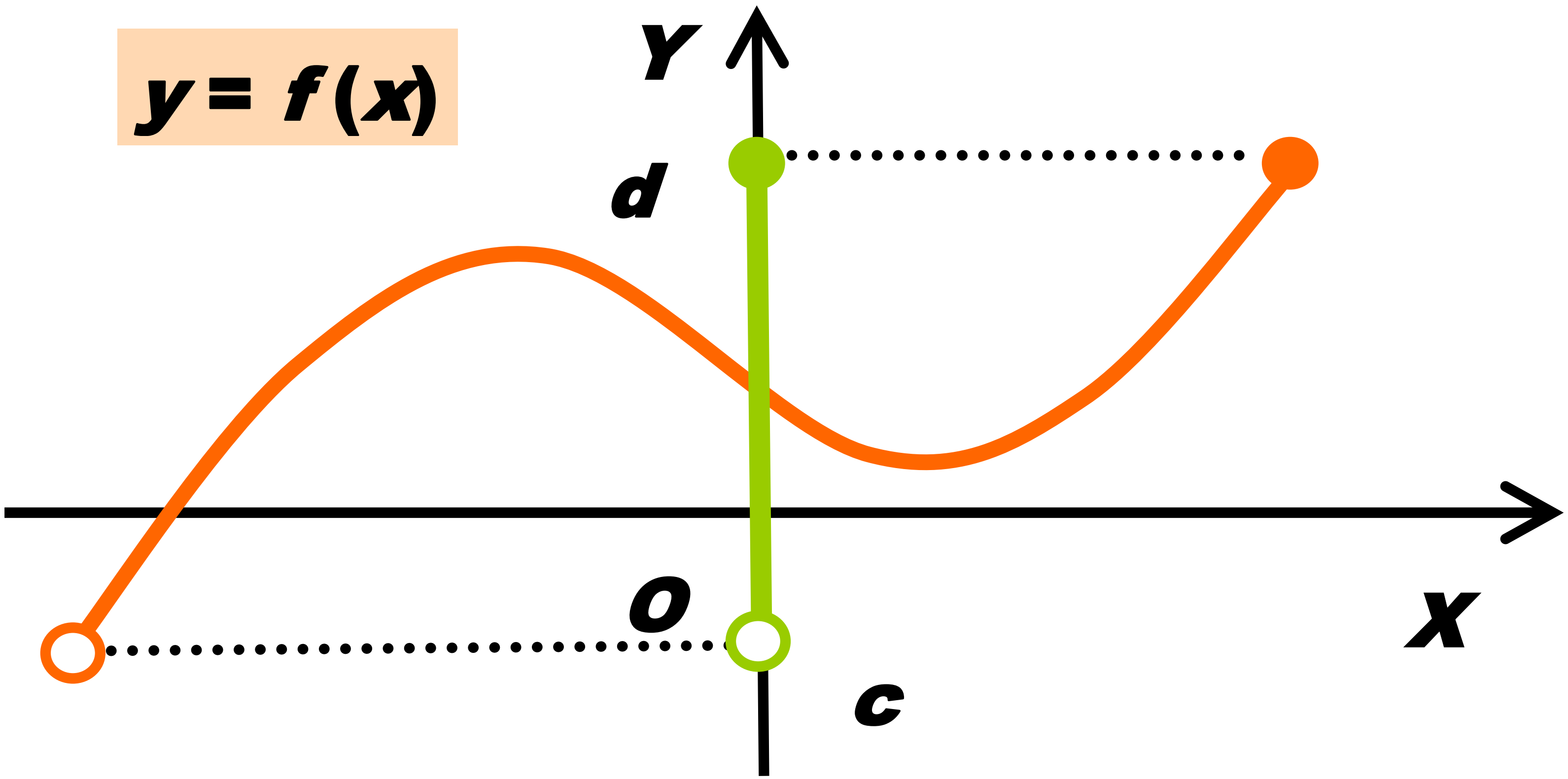
Odczytaj z wykresu dziedzinę funkcji $y = f(x)$.



$$D = (\, a \,;\, b \,\rangle$$

Wykres funkcji – zadanie

Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji $y = f(x)$.



$$Y_W = (c\,;\,d\rangle$$

Monotoniczność funkcji – idea

Funkcja $f : X \to Y$ jest rosnąca w przedziale $(a\,;\,b) \subset X$, jeśli większemu argumentowi z przedziału $(a\,;\,b)$ przyporządkowuje większą wartość.

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest malejąca w przedziale $(a\,;\,b) \subset X$, jeśli większemu argumentowi z przedziału $(a\,;\,b)$ przyporządkowuje mniejszą wartość.

Monotoniczność funkcji – definicje

Funkcja $f : X \to Y$ **jest rosnąca**

w przedziale $(a\,;\,b) \subset X$**, jeśli**

$$\underset{x_1,\, x_2 \in (a\,;\,b)}{\forall} \left[\, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \,\right]$$

Funkcja $f : X \to Y$ **jest malejąca**

w przedziale $(a\,;\,b) \subset X$**, jeśli**

$$\underset{x_1,\, x_2 \in (a\,;\,b)}{\forall} \left[\, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \,\right]$$

Funkcja stała

Funkcja $f: X \to Y$ jest stała w przedziale $(a\,;b) \subset X$, jeśli w tym przedziale jej wartości nie zmieniają się.

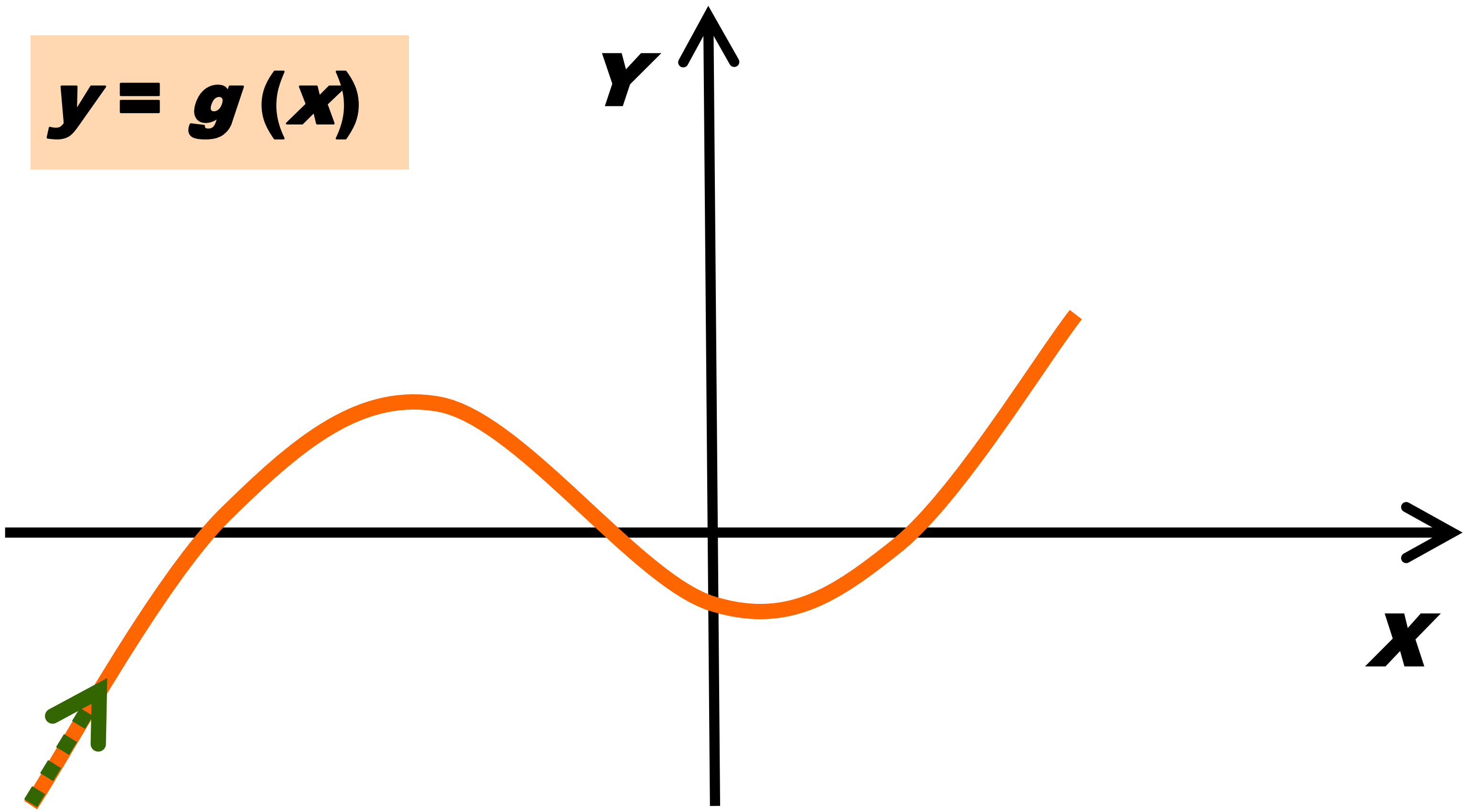
Monotoniczność funkcji

Badanie monotoniczności funkcji polega na ustaleniu, w jakich przedziałach dziedziny funkcja rośnie, w jakich maleje, w jakich jest stała.

Zadanie 1

Opisz monotoniczność funkcji $y = g(x)$ na podstawie wykresu.

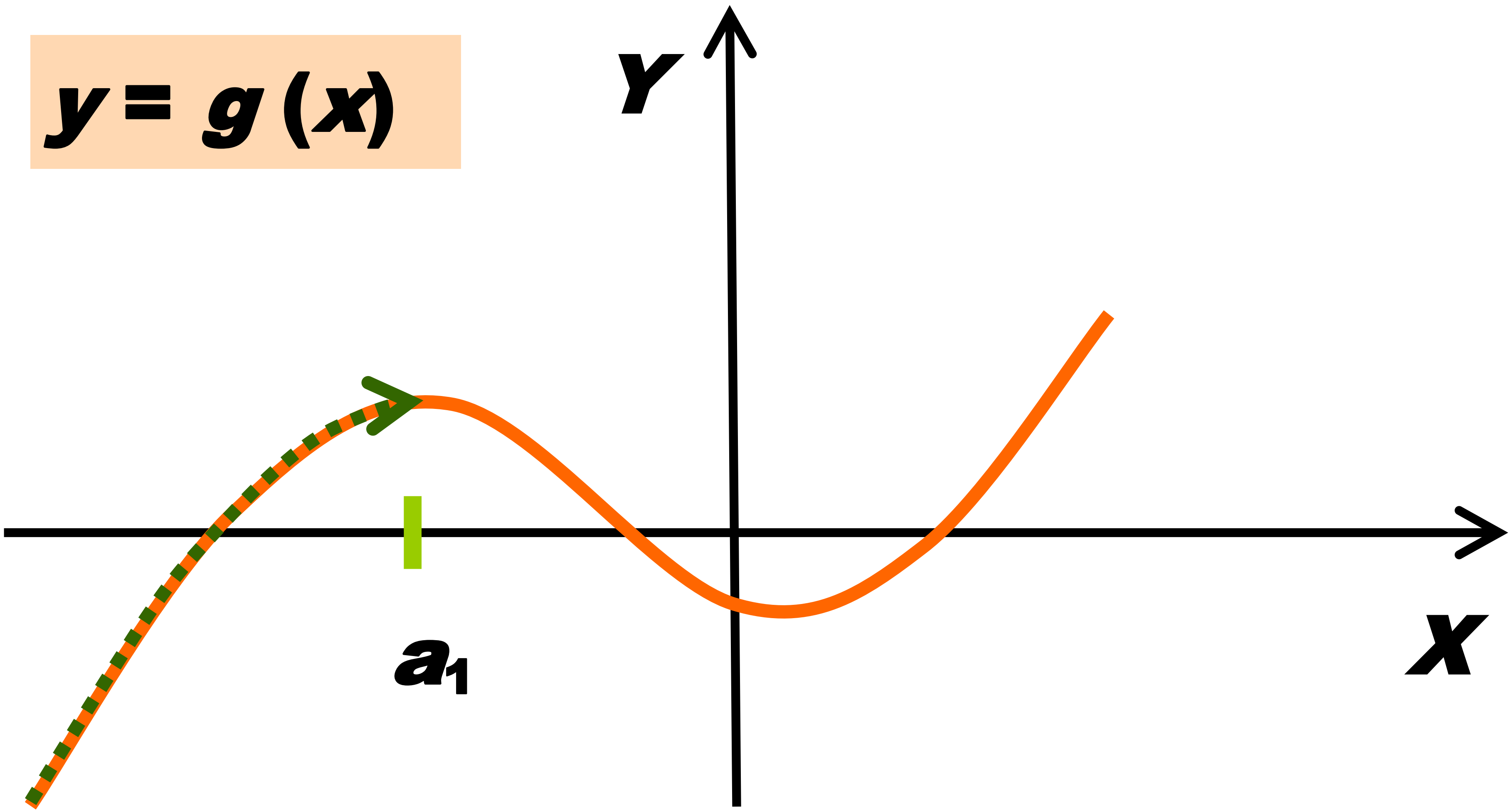
Monotoniczność – zadanie 1.



Przesuwamy się po wykresie w kierunku rosnących argumentów *x* ...

Monotoniczność – zadanie 1.

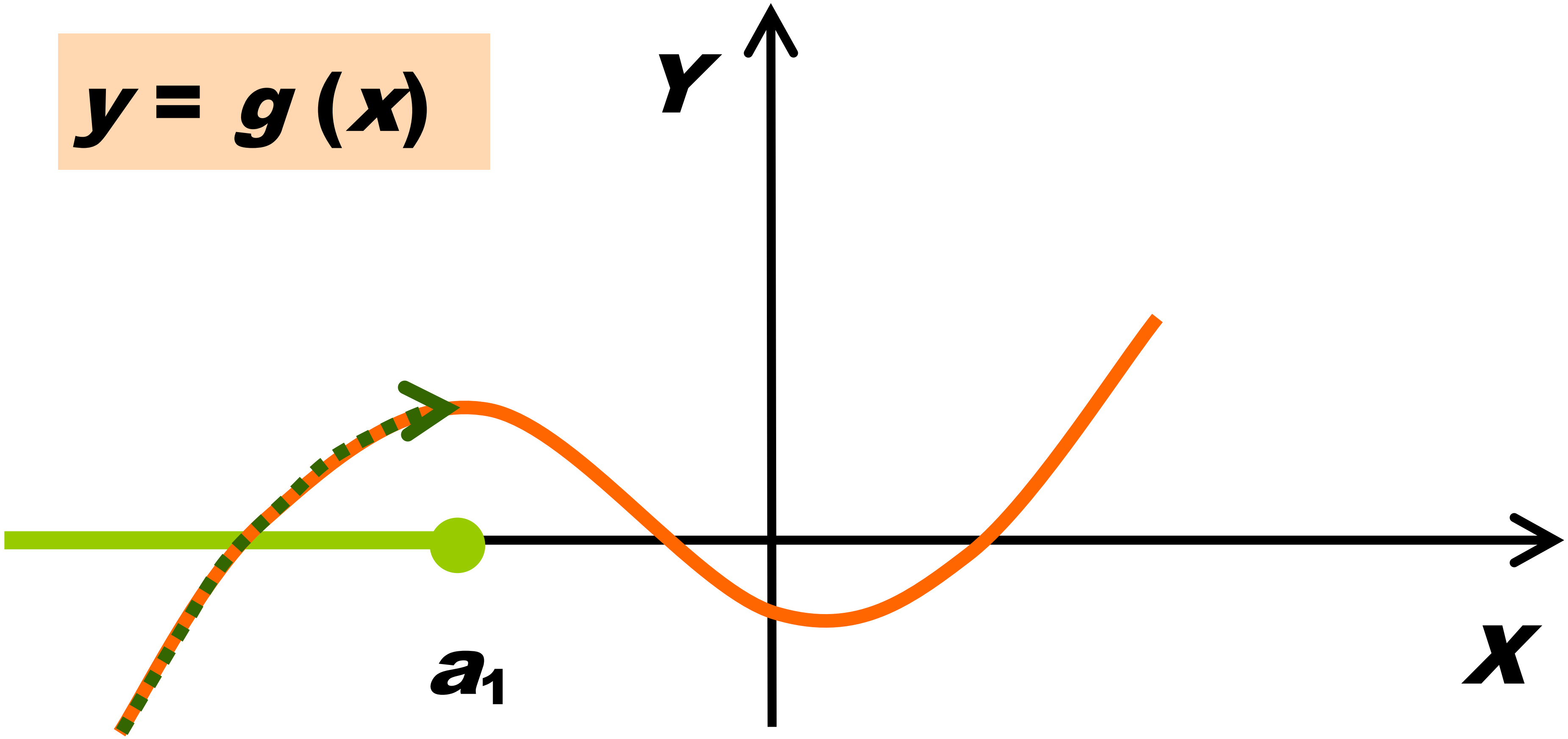
$y = g(x)$



... dopóki wykres wznosi się do góry.

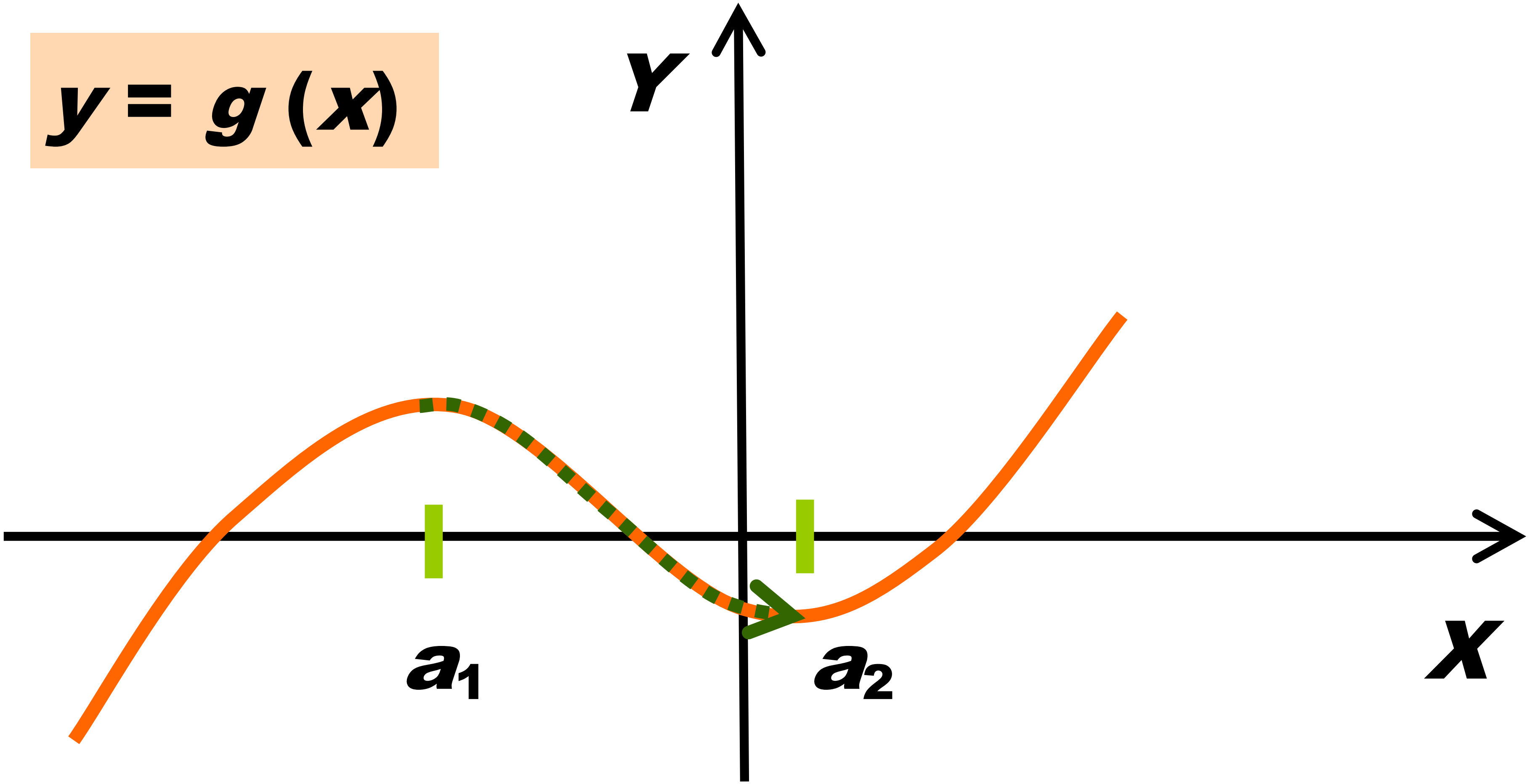
Monotoniczność – zadanie 1.

$y = g(x)$



Taki przebieg wykresu oznacza, że dla $x \in \left(-\infty ; a_1\right\rangle$ funkcja jest rosnąca.

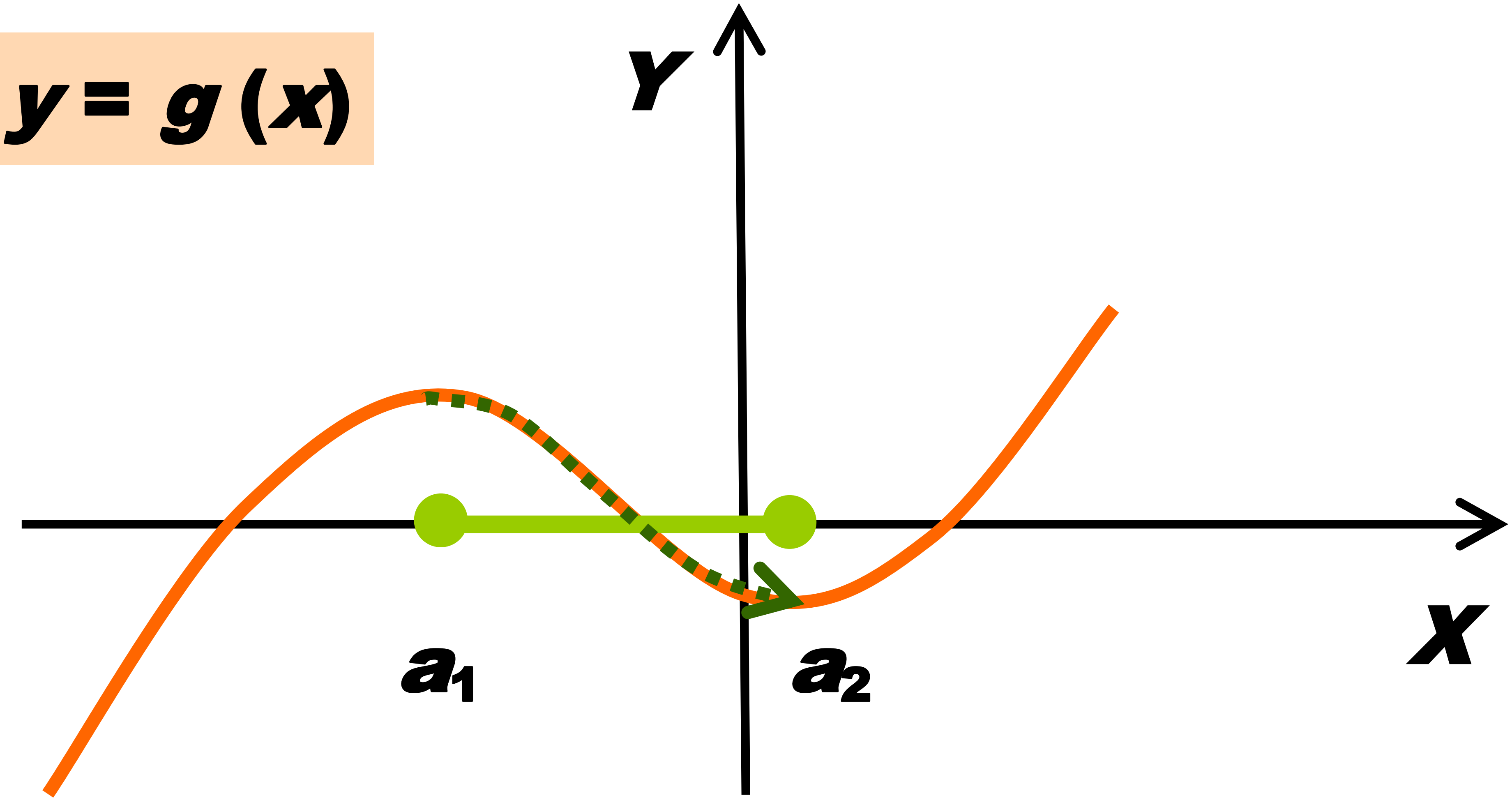
Monotoniczność – zadanie 1.



Teraz przesuwamy się po wykresie w kierunku rosnących argumentów *x*, dopóki wykres opada w dół.

Monotoniczność – zadanie 1.

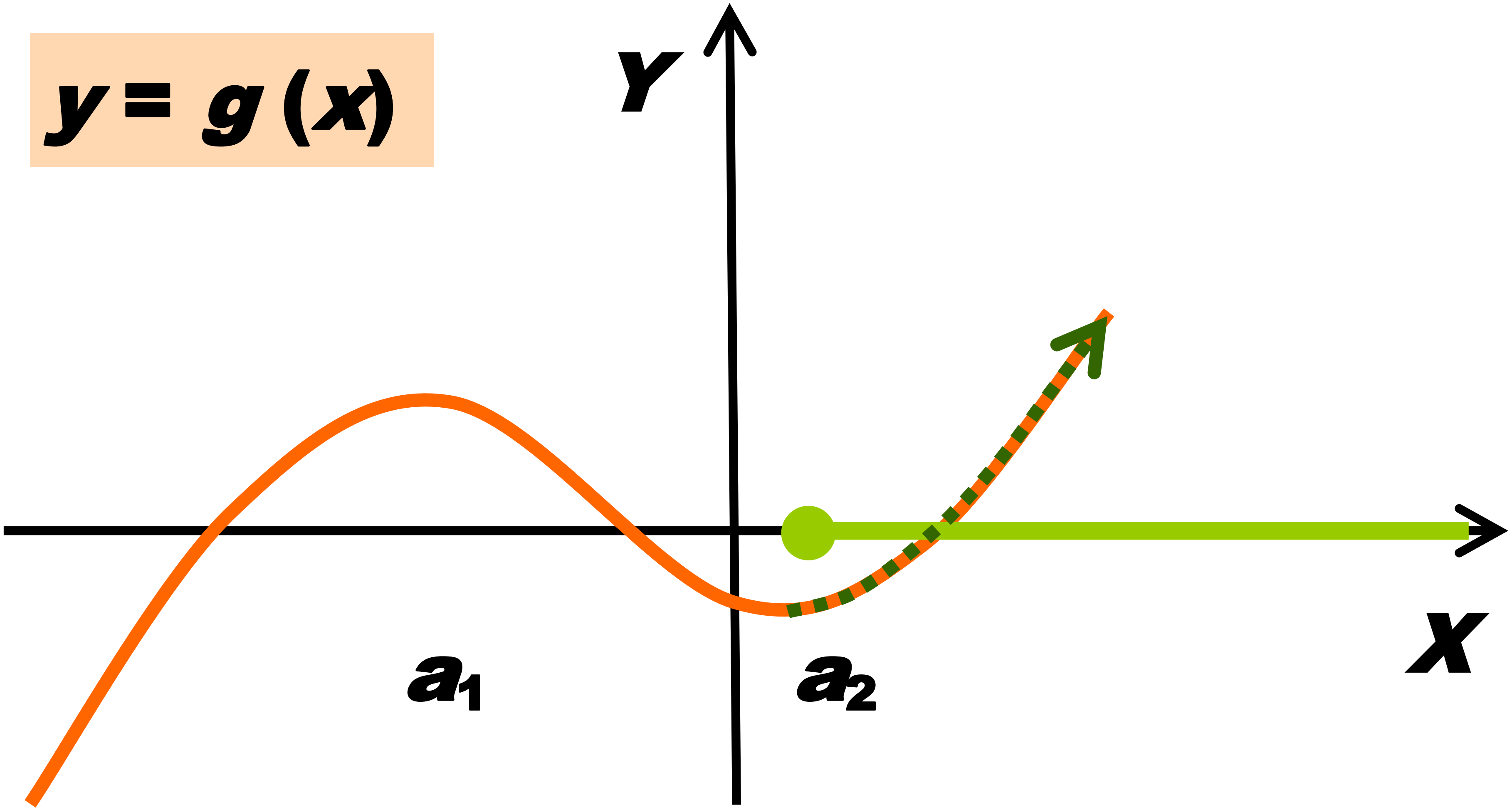
$y = g(x)$



$f(x)\downarrow \quad dla \quad x \in \langle a_1 ; a_2 \rangle$

Monotoniczność – zadanie 1.

$y = g(x)$



$$f(x)\uparrow \quad dla \quad x \in \langle a_2; +\infty)$$

Monotoniczność – zadanie 1.

Odp.:

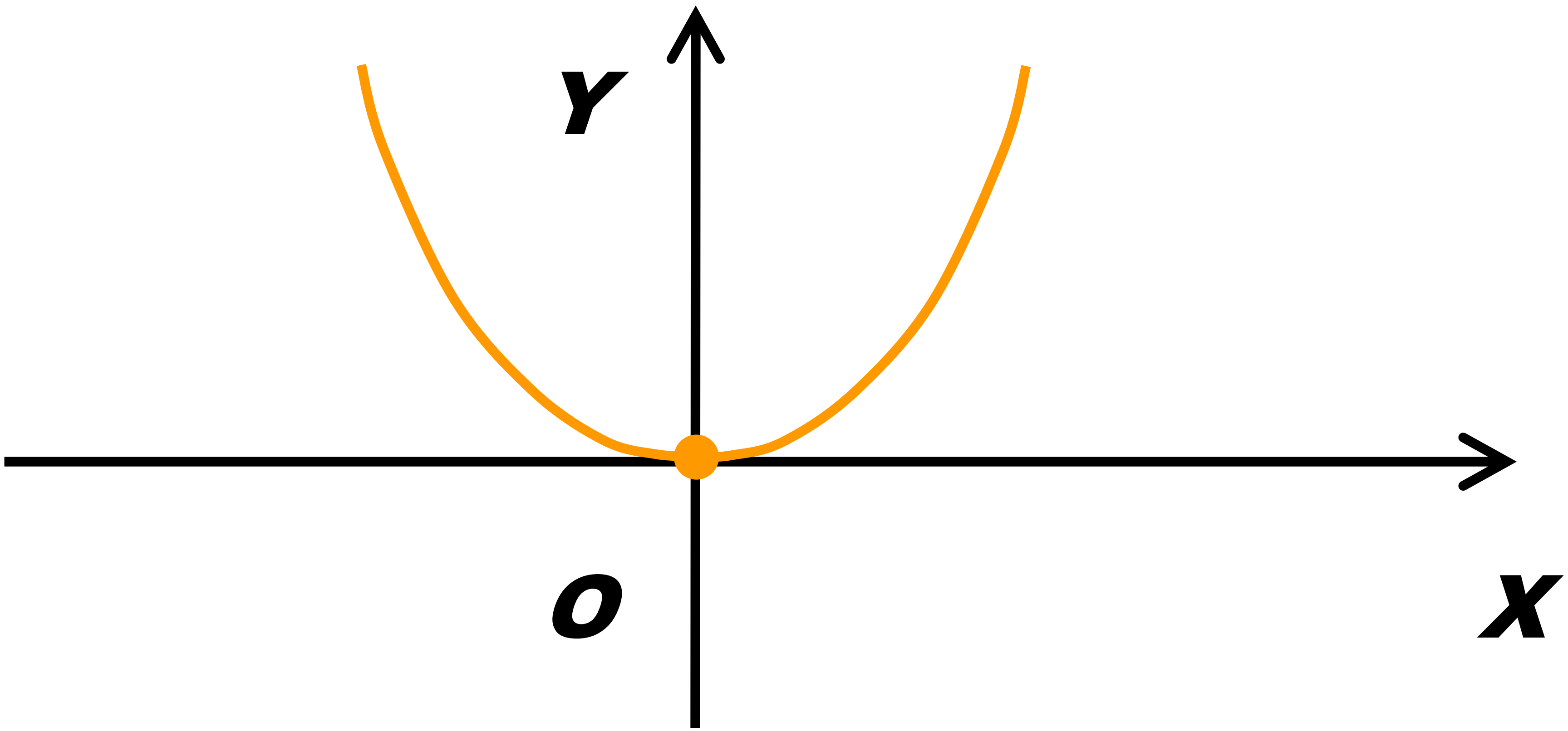
$$f(x)\uparrow \quad \text{dla} \quad x \in \left(-\infty\,;\, a_1\right\rangle, \quad x \in \left\langle a_2\,;\, +\infty\right)$$

$$f(x)\downarrow \quad \text{dla} \quad x \in \left\langle a_1\,;\, a_2\right\rangle$$

Minimum globalne – idea

Funkcja $f : X \to Y$ ma minimum globalne w punkcie $x_0 \in X$, jeśli wartość $f(x_0)$ jest najmniejsza ze wszystkich wartości funkcji w dziedzinie.

Przykład minimum globalnego

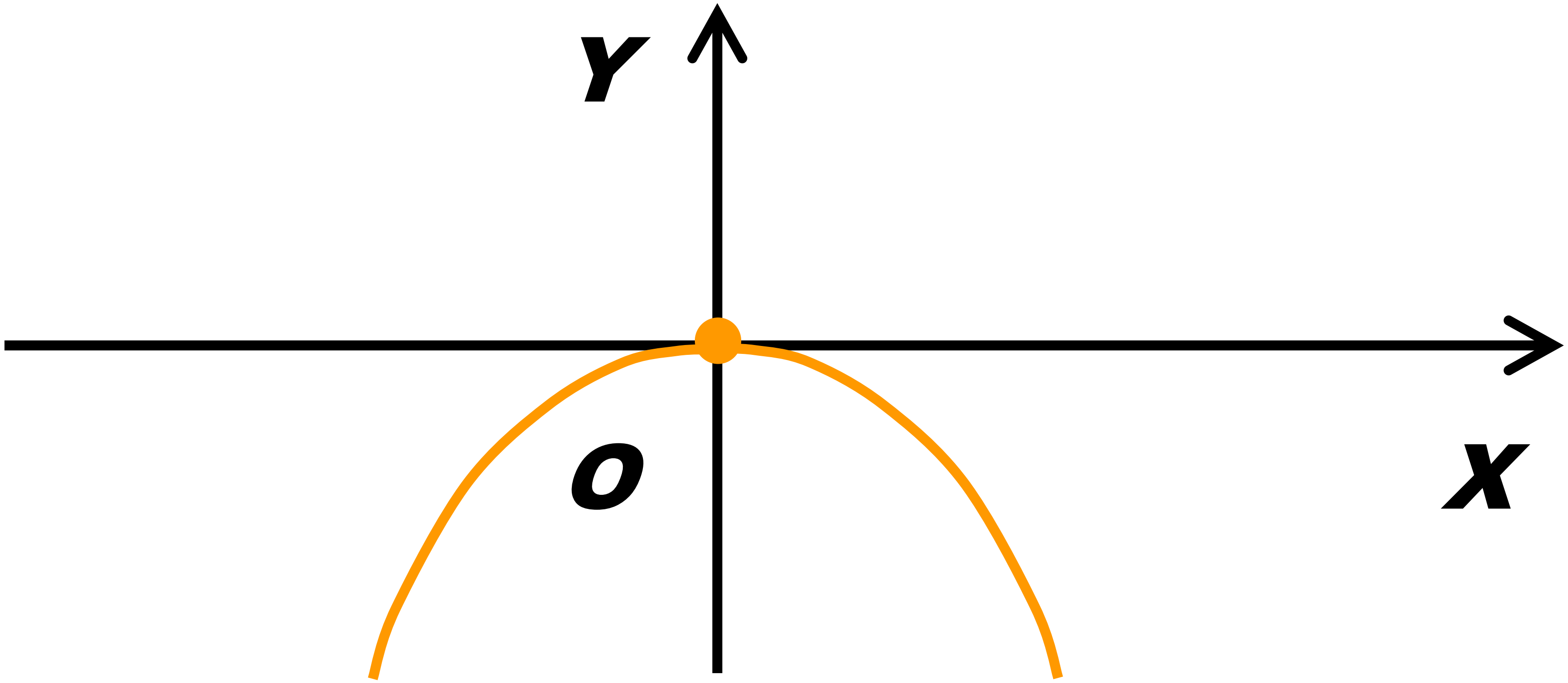


W punkcie x_0 = 0 funkcja ma wartość najmniejszą – minimum globalne.

Maksimum globalne – idea

Funkcja $f : X \to Y$ ma maksimum globalne w punkcie $x_0 \in X$, jeśli wartość $f(x_0)$ jest największa ze wszystkich wartości funkcji w dziedzinie.

Przykład maksimum globalnego

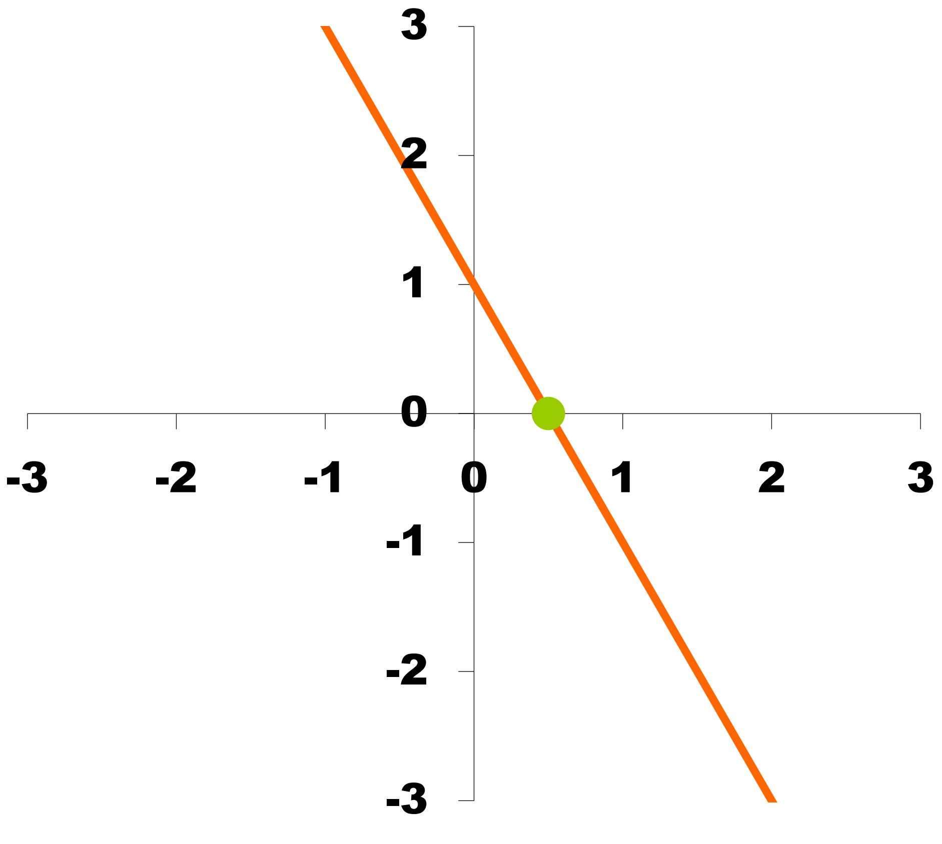


W punkcie x_0 = 0 funkcja przyjmuje wartość największą – maksimum globalne.

Przykład 1

Dany jest wzór funkcji

$$y = f(x) = -2x + 1$$



dziedzina $D_f = R$

zbiór wartości R

miejsce zerowe $x_0=0{,}5$

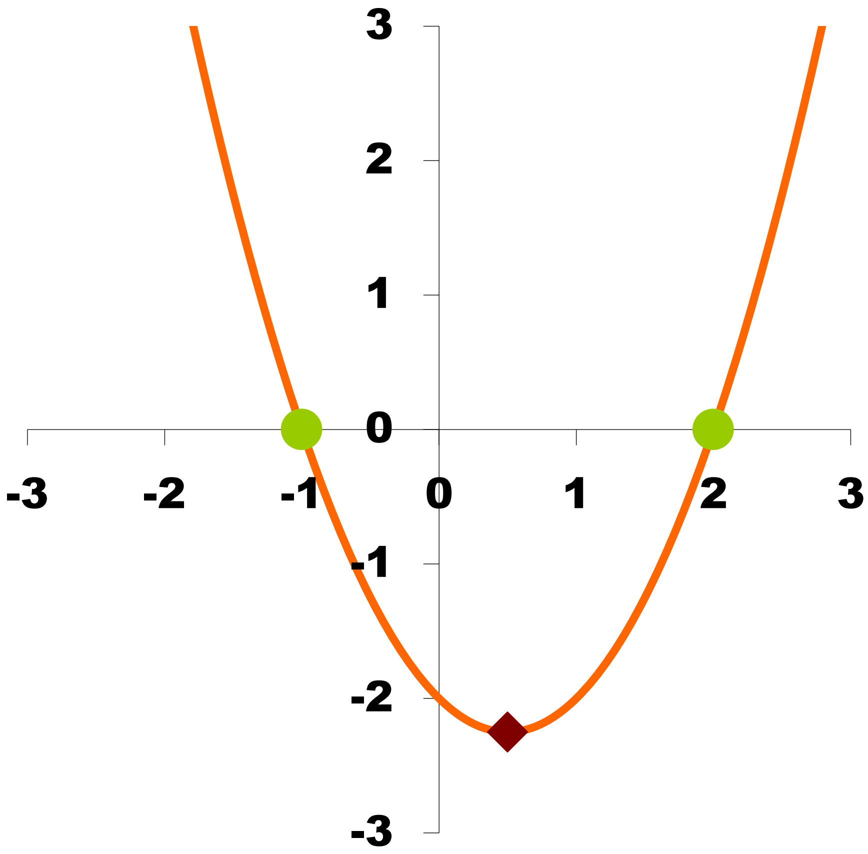
$f(x)>0$ dla $x < 0{,}5$
$f(x)<0$ dla $x > 0{,}5$

$f \downarrow$ w R

Przykład 2

Dany jest wzór funkcji

$$y = f(x) = x^2 - x - 2$$



dziedzina $D_f = R$

zbiór wartości $\left[-2\frac{1}{4}; +\infty\right)$

miejsca zerowe:

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$f \downarrow$ dla $x \leq 0{,}5$

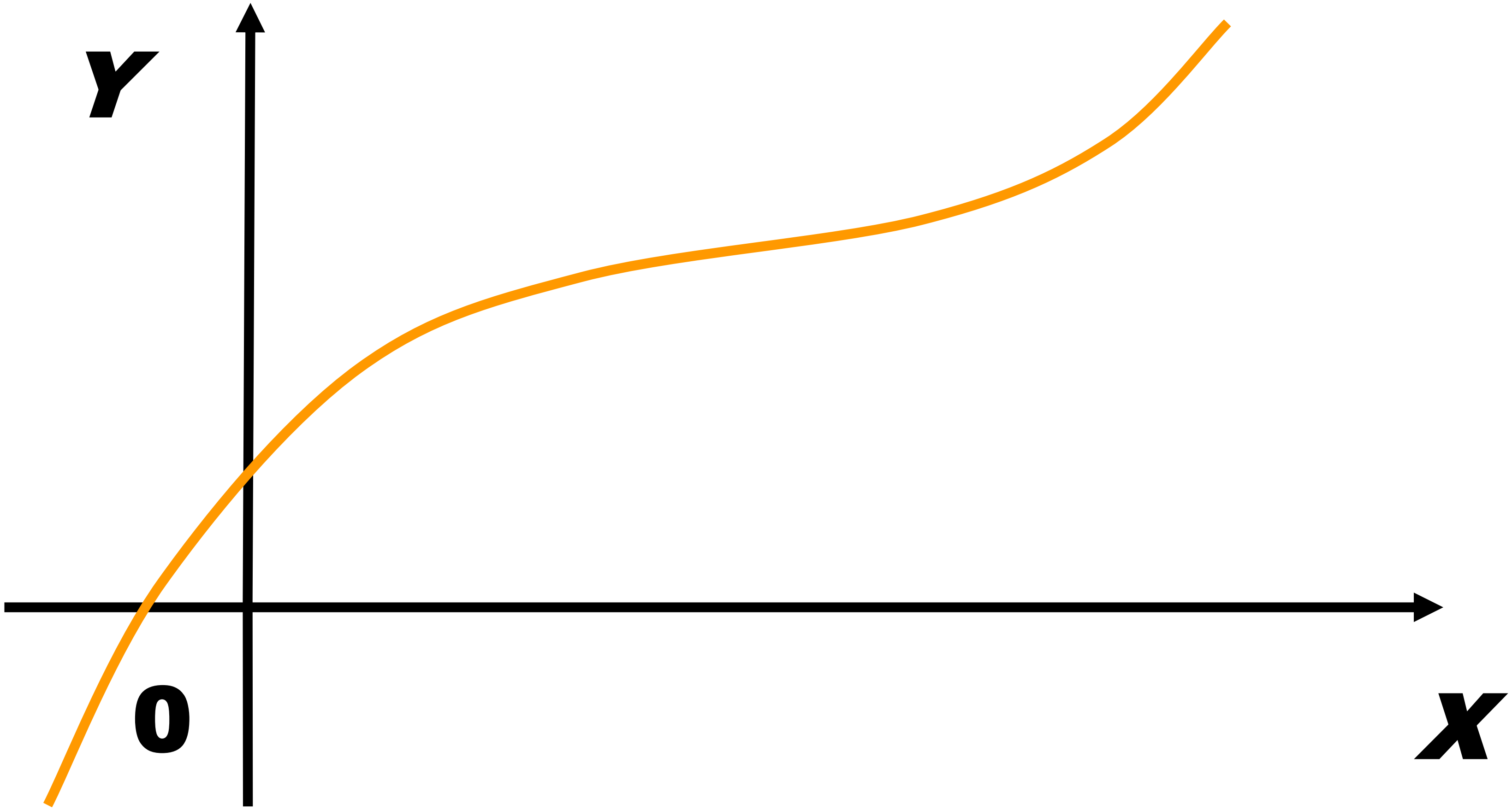
$f \uparrow$ dla $x \geq 0{,}5$

minimum

dla $x_{min}=0{,}5$, $y_{min}=-2{,}25$

Granica funkcji w punkcie x_0

$y = f(x)$



Granica funkcji w punkcie x_0

Niech $f: D \to R$, $y = f(x)$

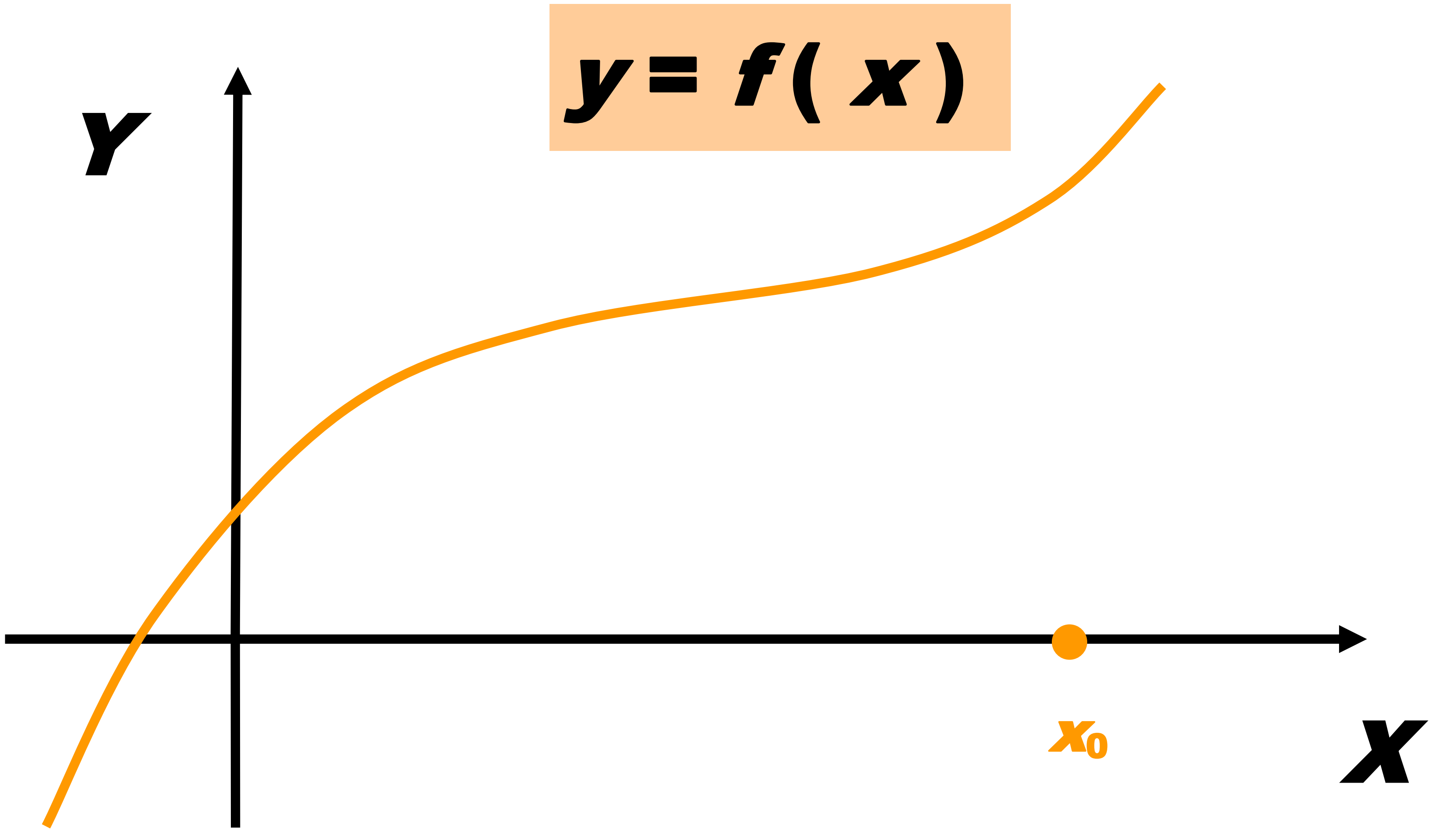
Wybieramy punkt x_0,

$$x_0 \in D \quad \text{lub} \quad x_0 \notin D$$

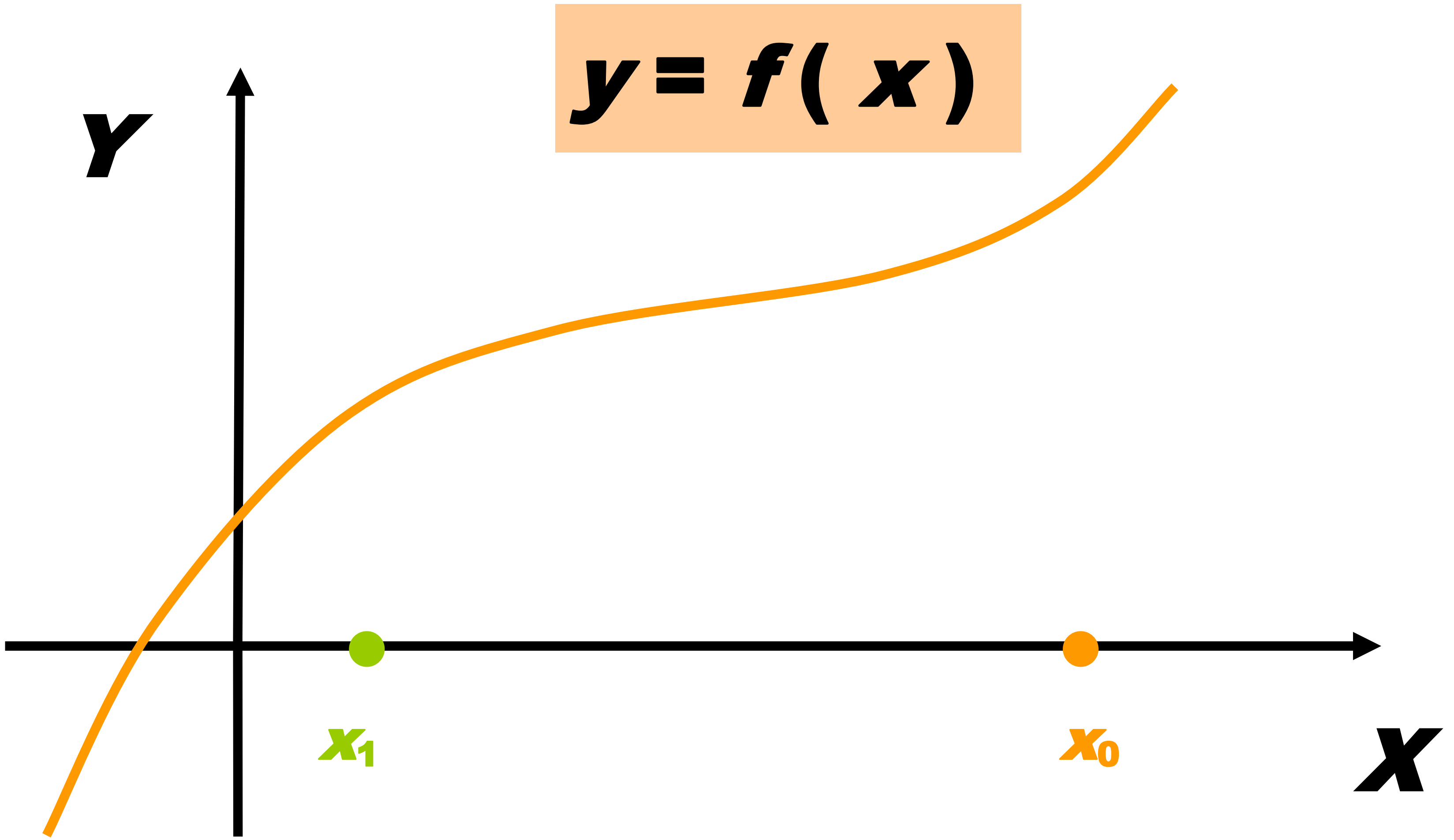
Rozpatrujemy ciąg argumentów (x_n) **dążący do** x_0

$$x_n \to x_0$$

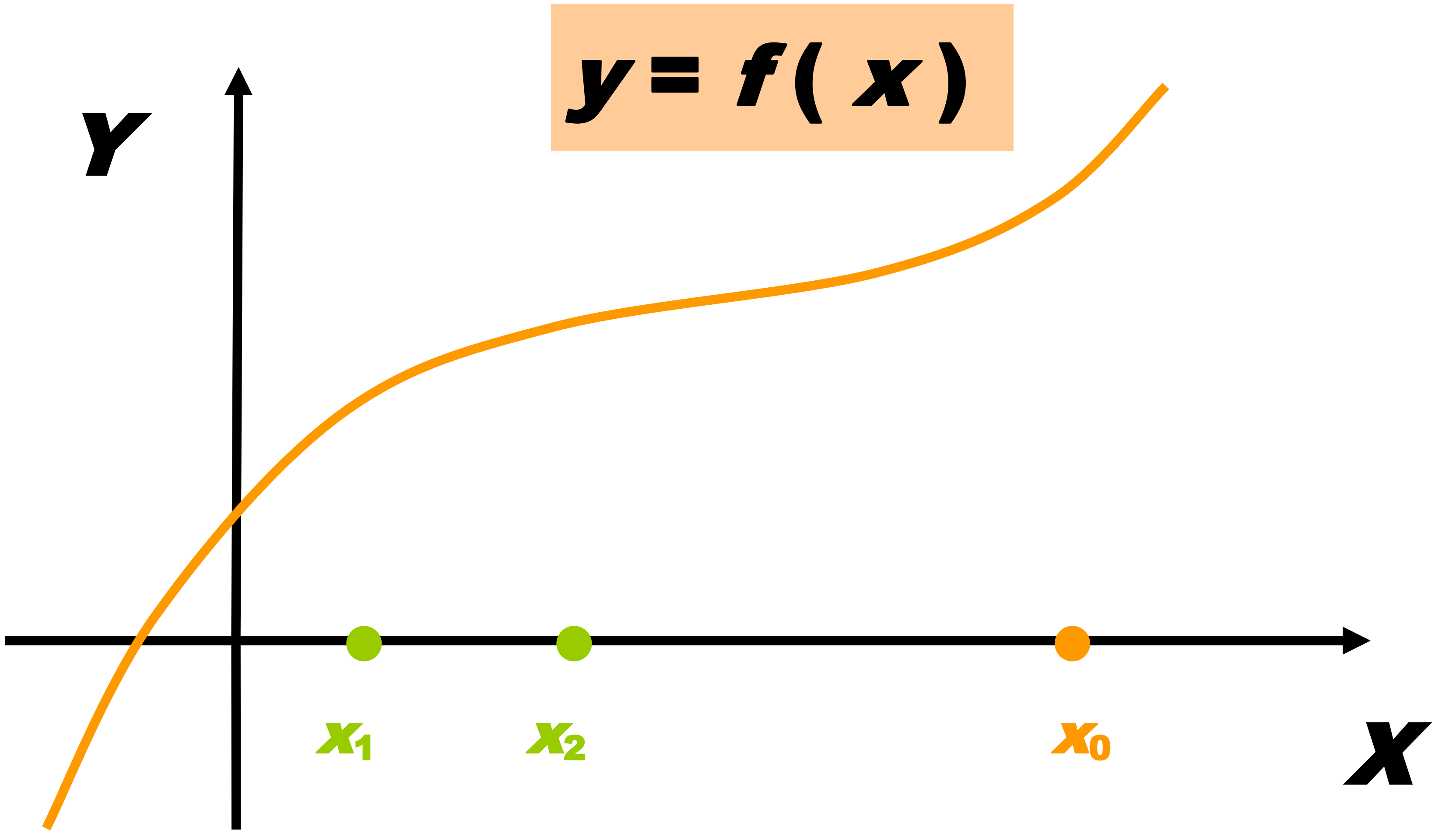
Granica funkcji w punkcie x_0



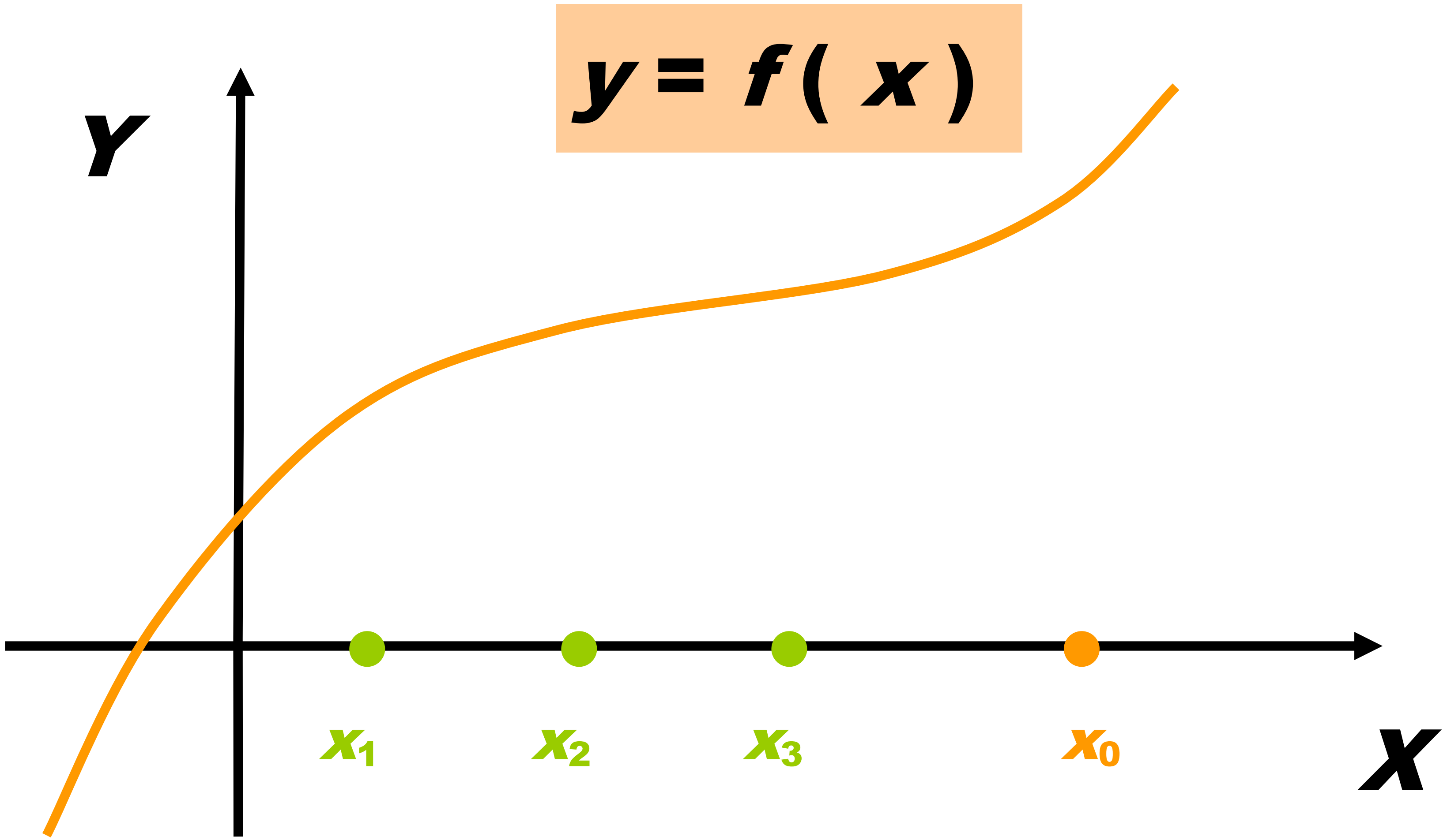
Granica funkcji w punkcie x_0



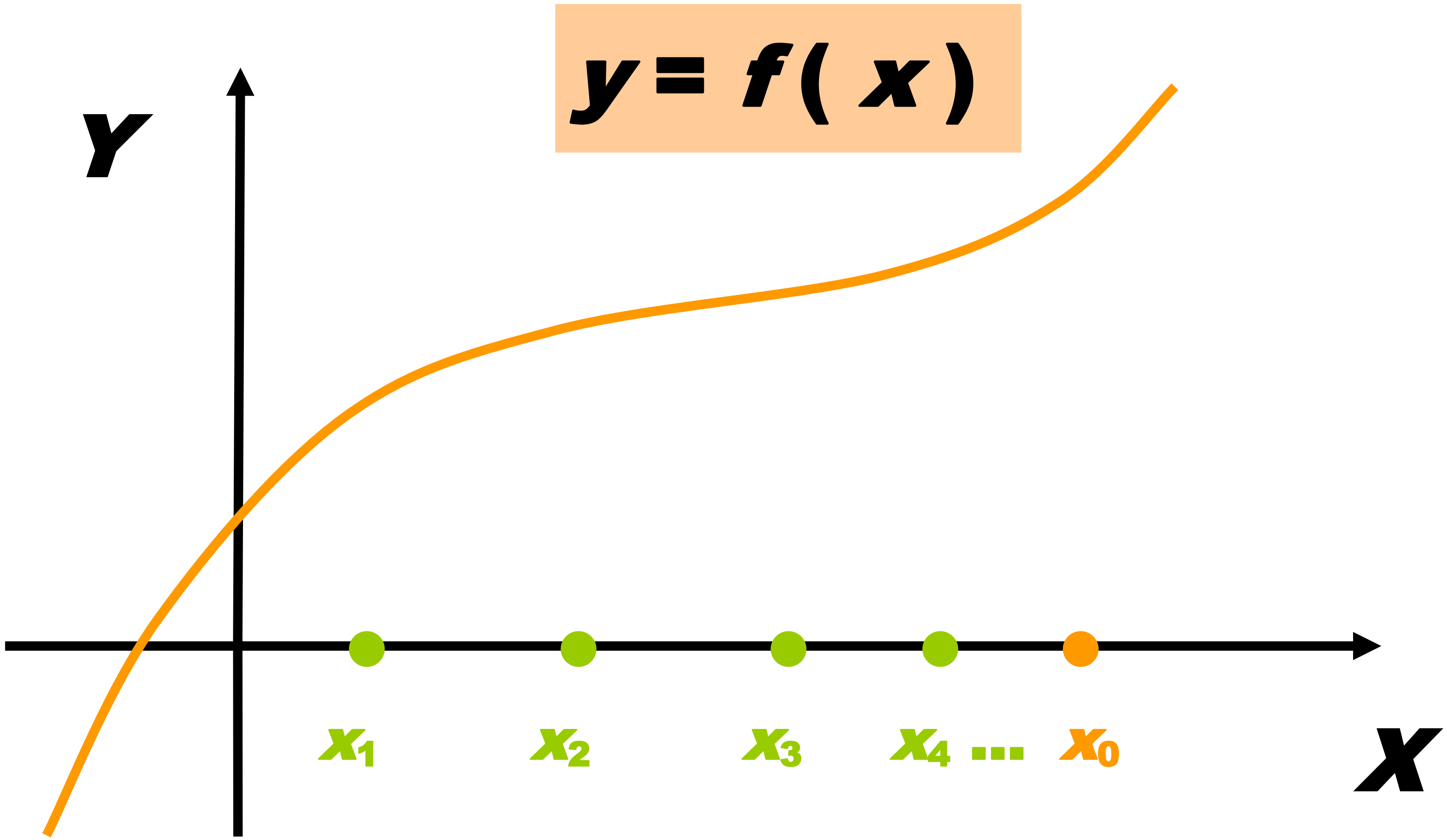
Granica funkcji w punkcie x_0



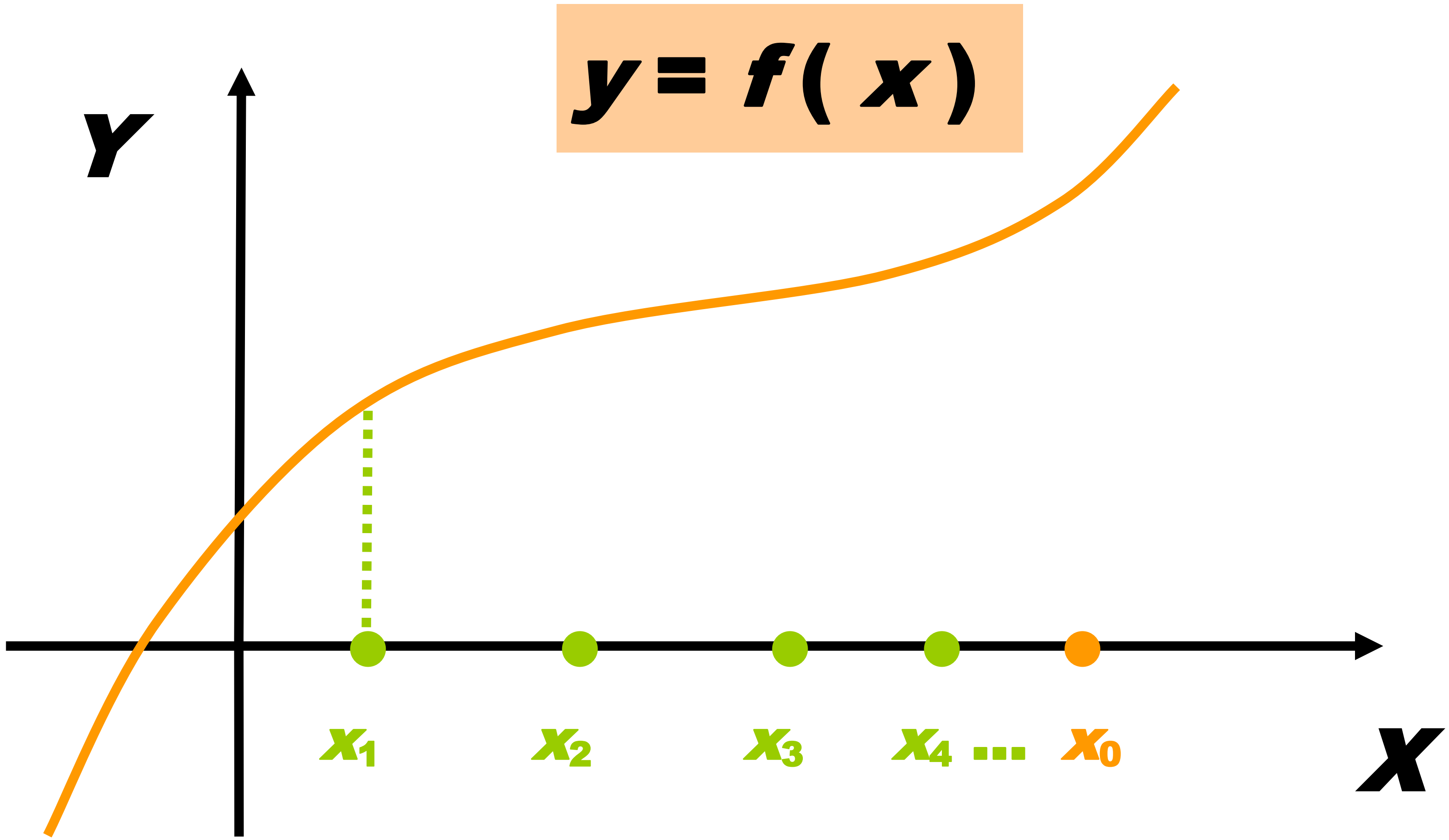
Granica funkcji w punkcie x_0



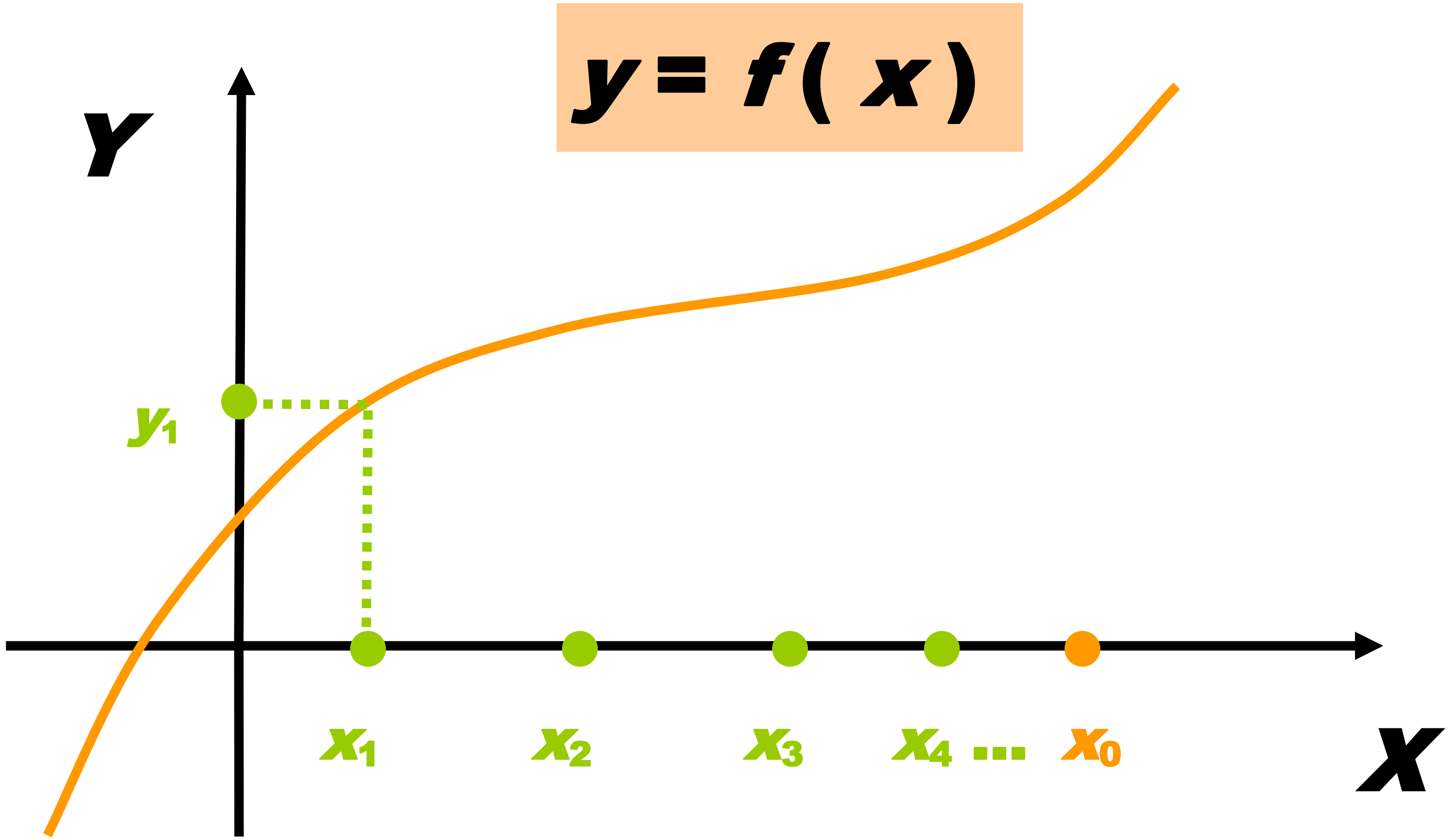
Granica funkcji w punkcie x_0



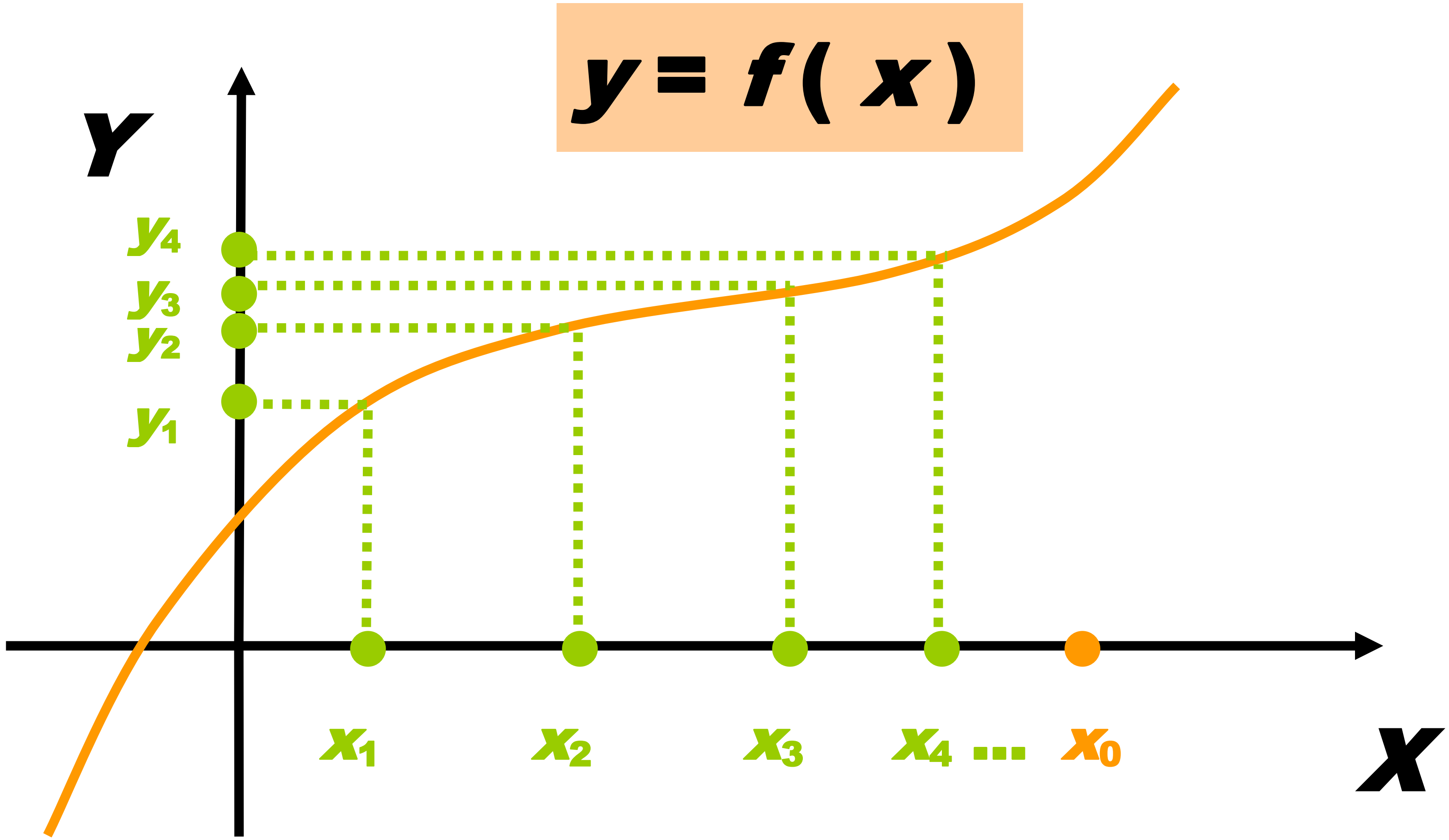
Granica funkcji w punkcie x_0



Granica funkcji w punkcie x_0



Granica funkcji w punkcie x_0



Granica funkcji w punkcie x_0

Dla ciągu argumentów (x_n) dążącego do x_0

$$x_n \to x_0$$

rozpatrujemy ciąg wartości

(y_n) lub inaczej ($f(x_n)$).

Jaka jest granica ciągu wartości

$$y_n \to ?$$

$$f(x_n) \to ?$$

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = ?$$

Definicja granicy funkcji w punkcie

Niech $f : D \to R$, x_0 – ustalony punkt,

$(x_0 \in D \text{ lub } x_0 \notin D)$ **, (x_n) – dowolny ciąg**

spełniający warunki:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

2. $x_n \in D \quad i \quad x_n \neq x_0$ **dla każdego** $n \in N^+$

Jeżeli istnieje granica ciągu wartości funkcji $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$ **niezależna od wyboru ciągu (x_n), to nazywamy ją granicą funkcji f w punkcie x_0 i piszemy** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Granica funkcji w punkcie

Jeśli

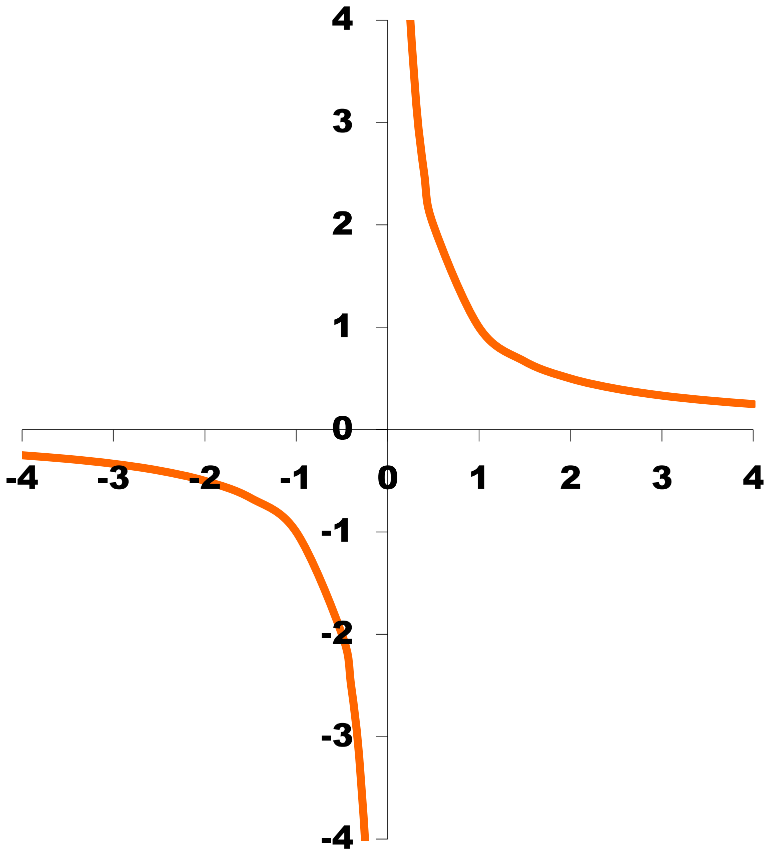
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

mówimy, że funkcja *f* ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą.

Uwaga. x_0 **może oznaczać** $\pm\infty$

Przykład

Dany jest wzór funkcji $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$



$D_f = R - \{0\}$

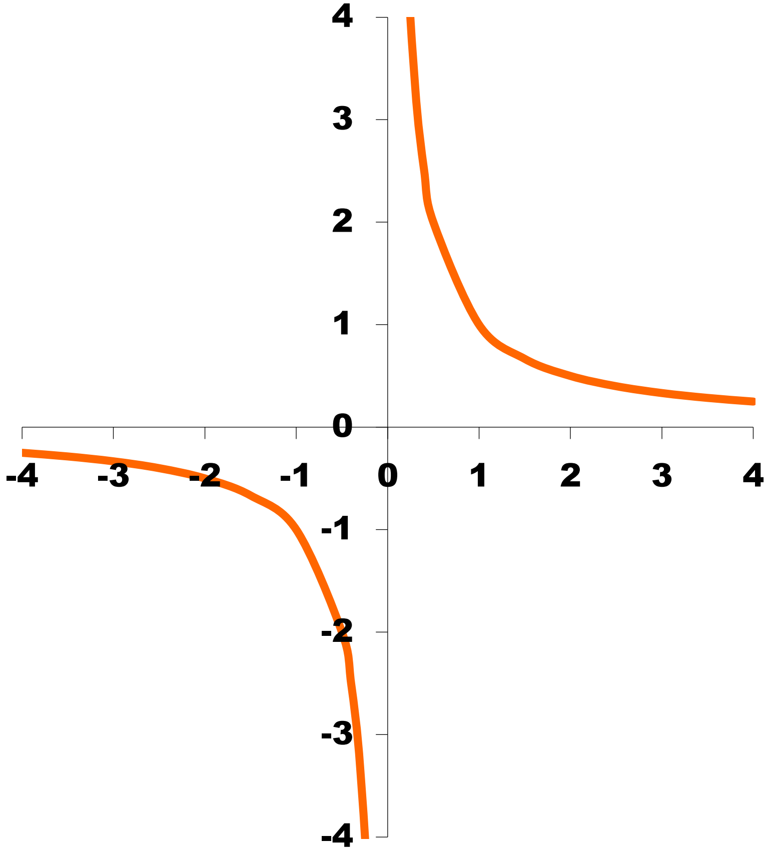
zbiór wartości $R - \{0\}$

brak miejsc zerowych

granice widoczne na wykresie

Przykład cd.

Dany jest wzór funkcji $y = f(x) = \frac{1}{x}$



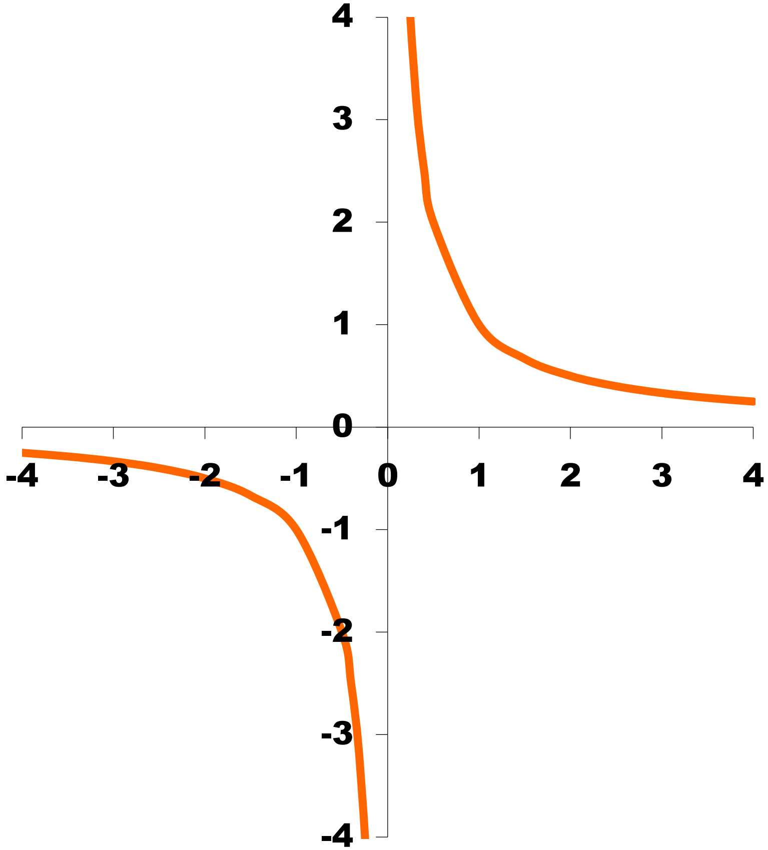
granice widoczne na wykresie:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Przykład cd.

Dany jest wzór funkcji $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$



granice widoczne na wykresie:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

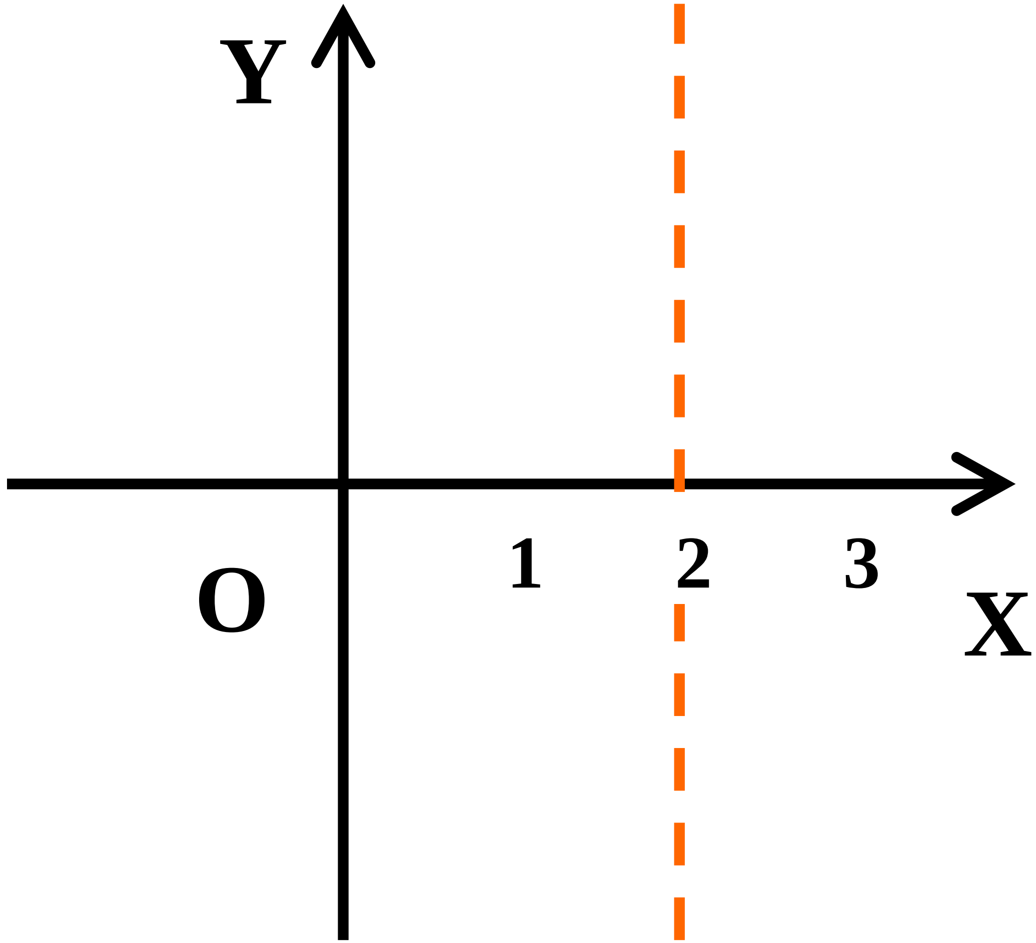
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Asymptoty funkcji

Asymptota pionowa - idea

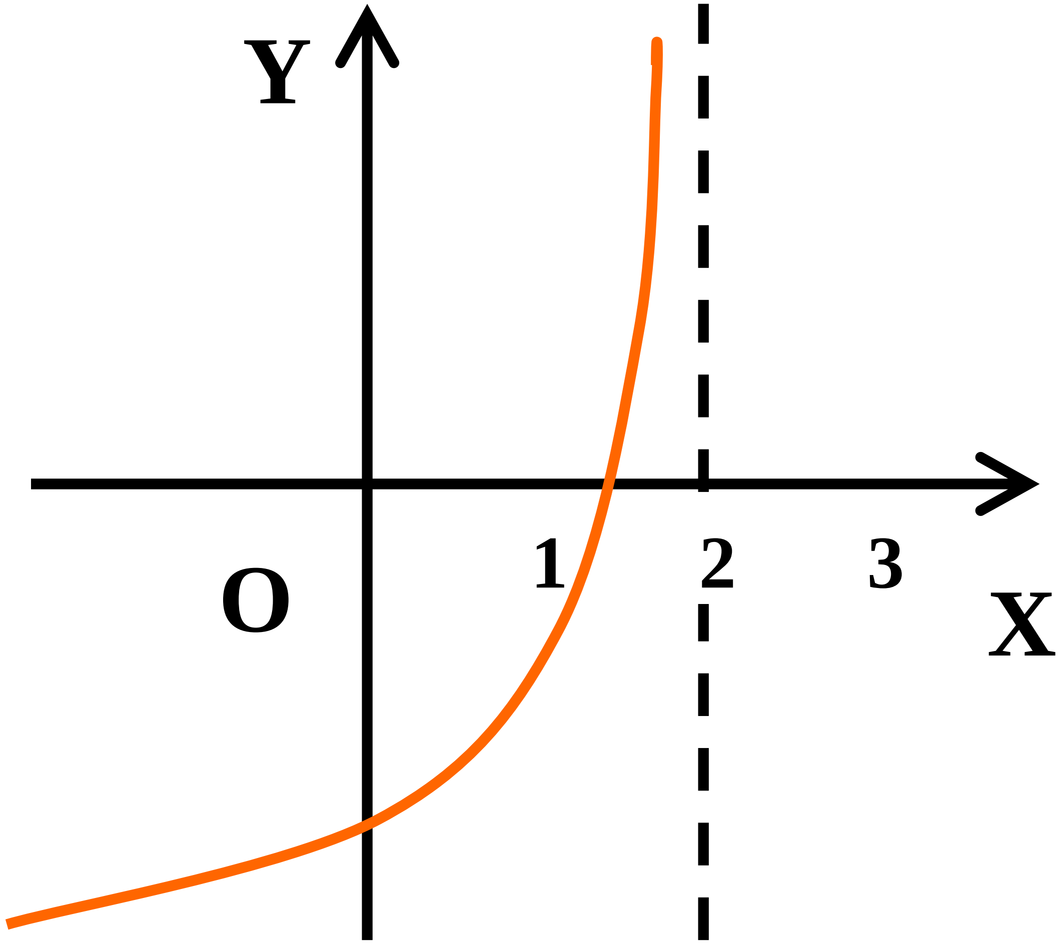
równanie prostej

$x = 2$



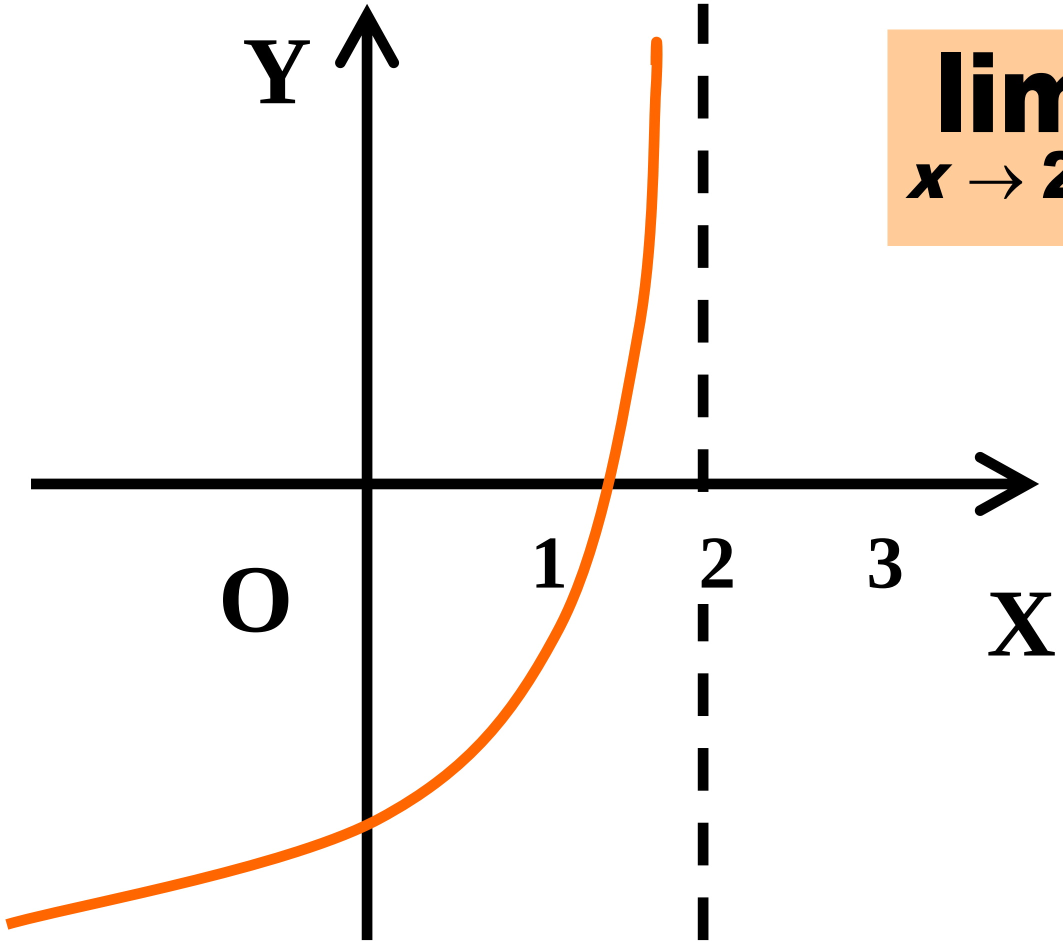
Asymptota pionowa

$x = 2$



Asymptota pionowa

$$x = 2$$



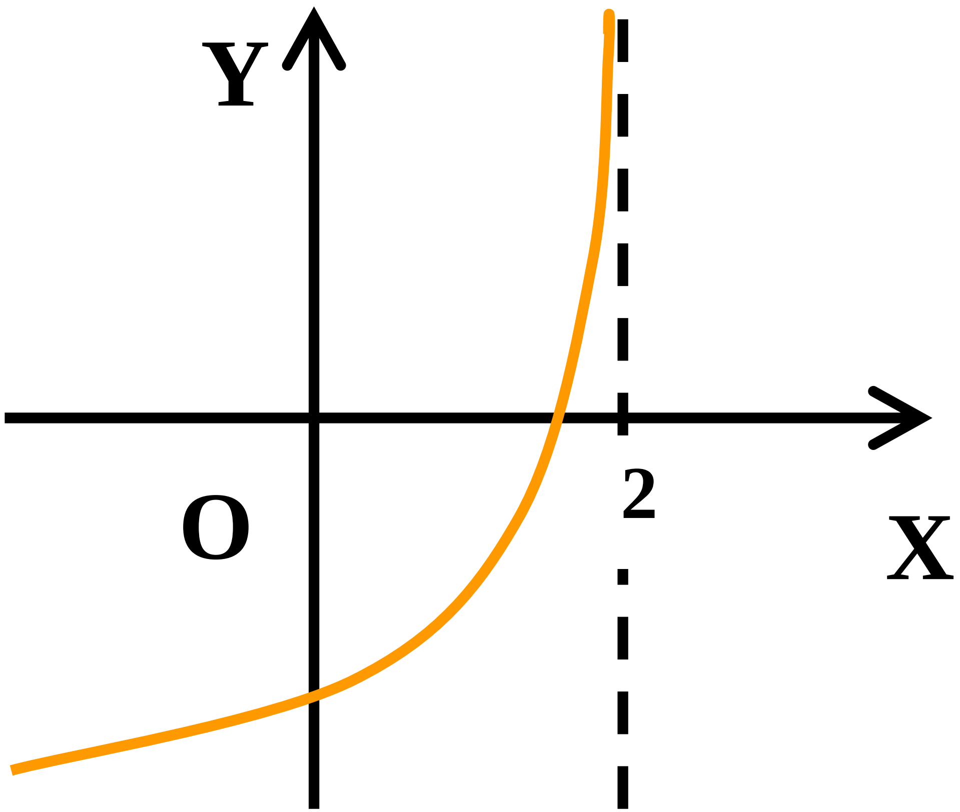
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

Asymptota pionowa

Rys. 1

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

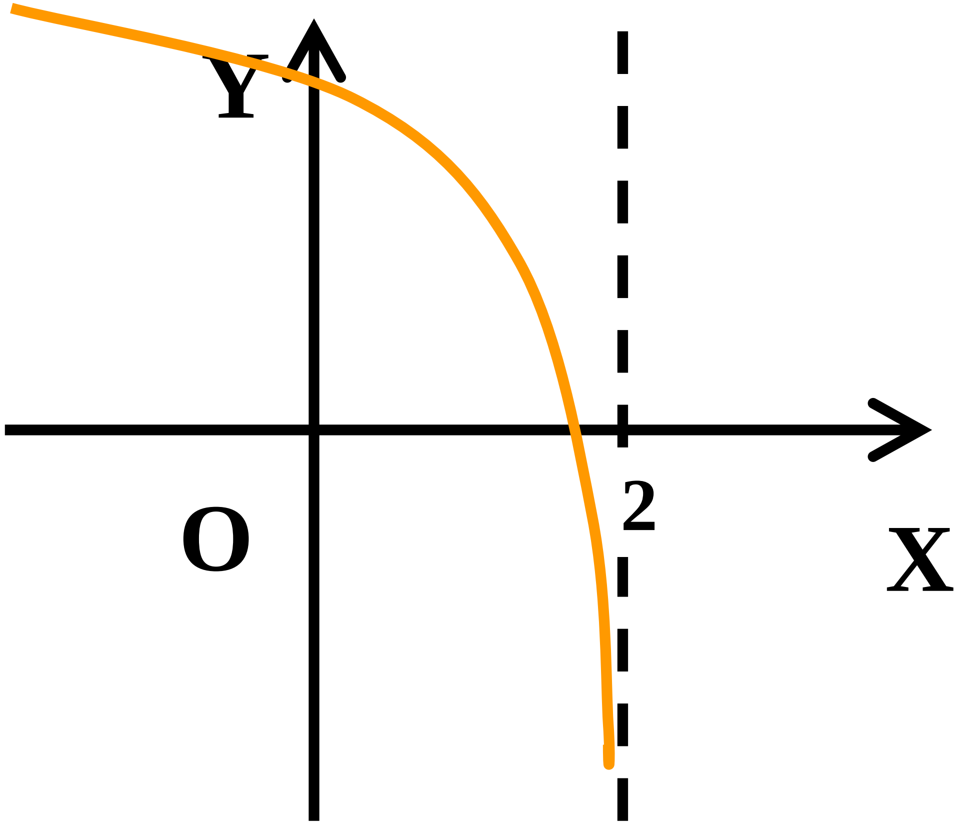
$$x = 2$$



Rys. 2

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

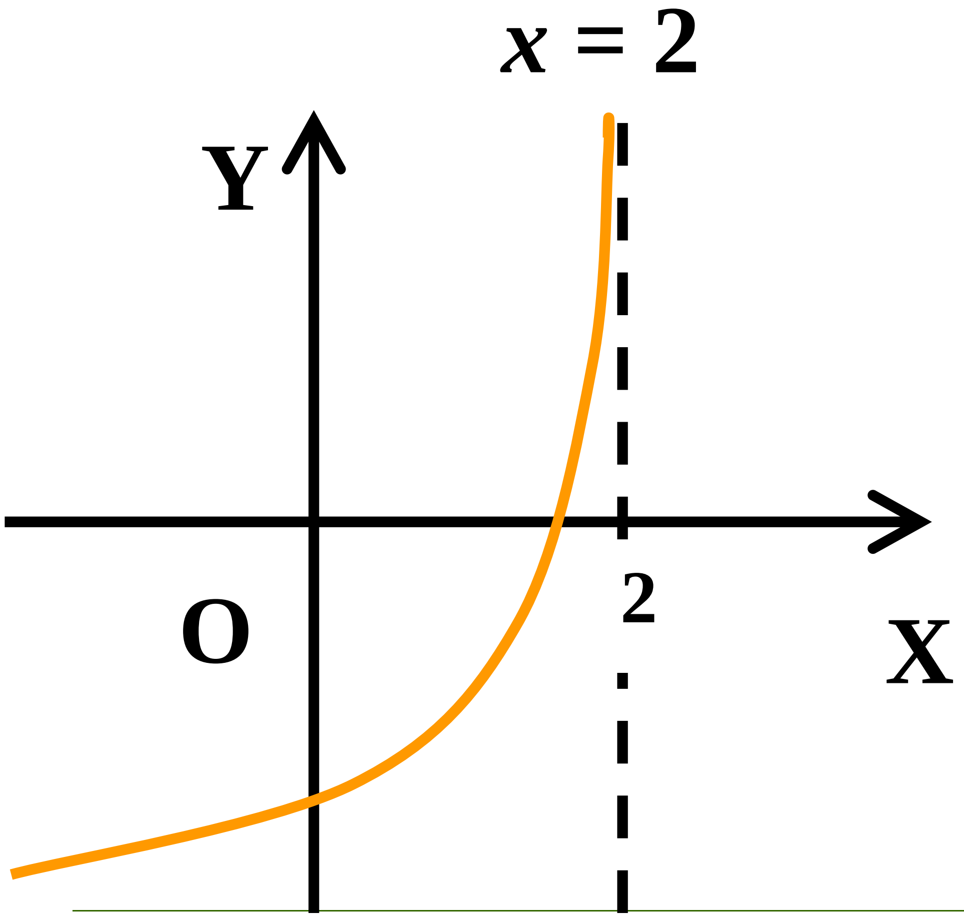
$$x = 2$$



Prosta o równaniu *x* = 2 jest asymptotą pionową lewostronną funkcji *y* = *f* (*x*)

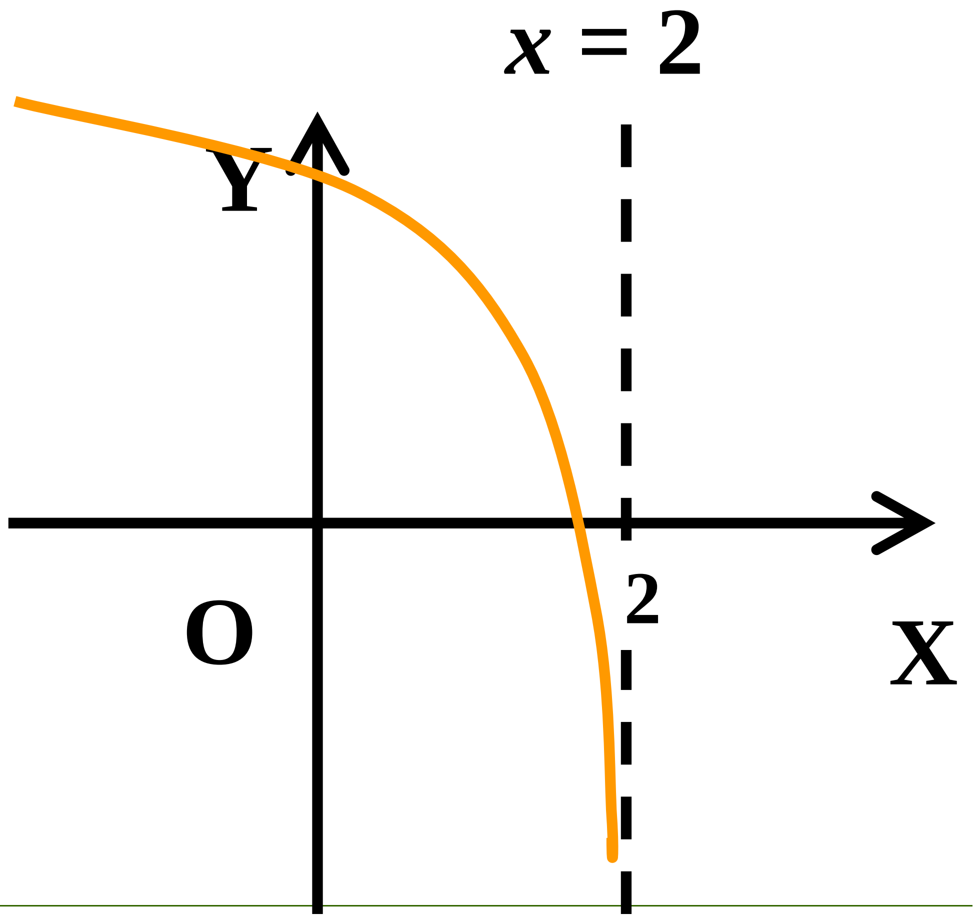
Rys. 1

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$



Rys. 2

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

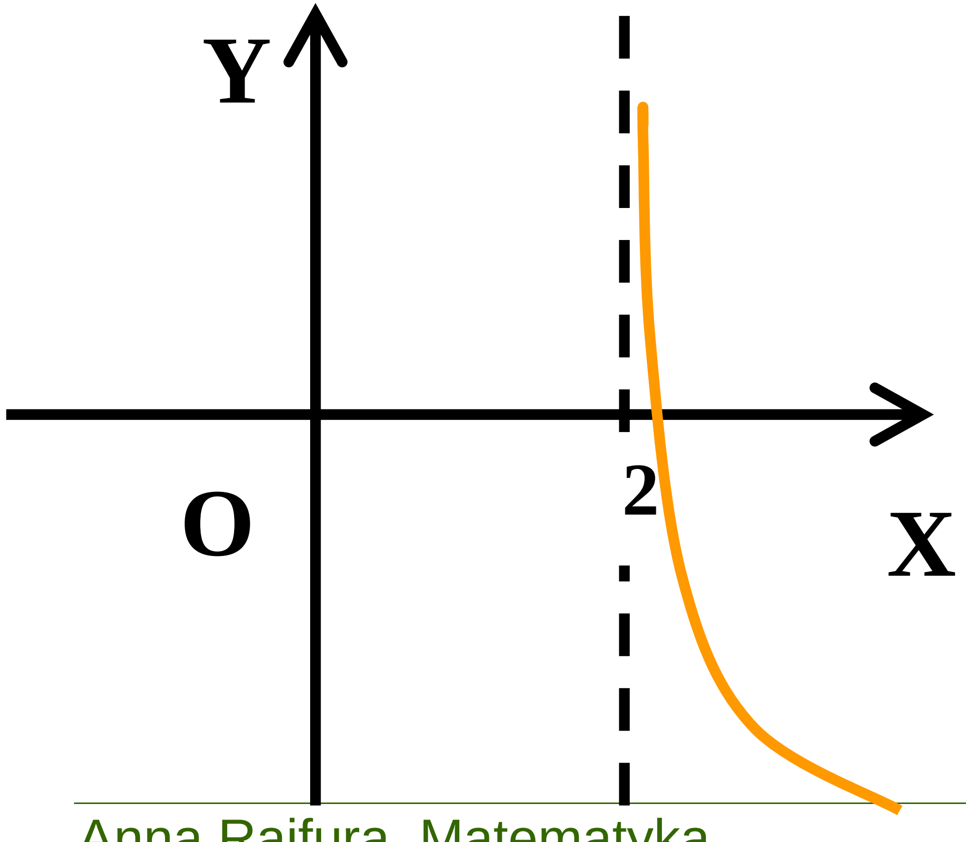


Prosta o równaniu $x = 2$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $y = f(x)$

Rys. 3

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

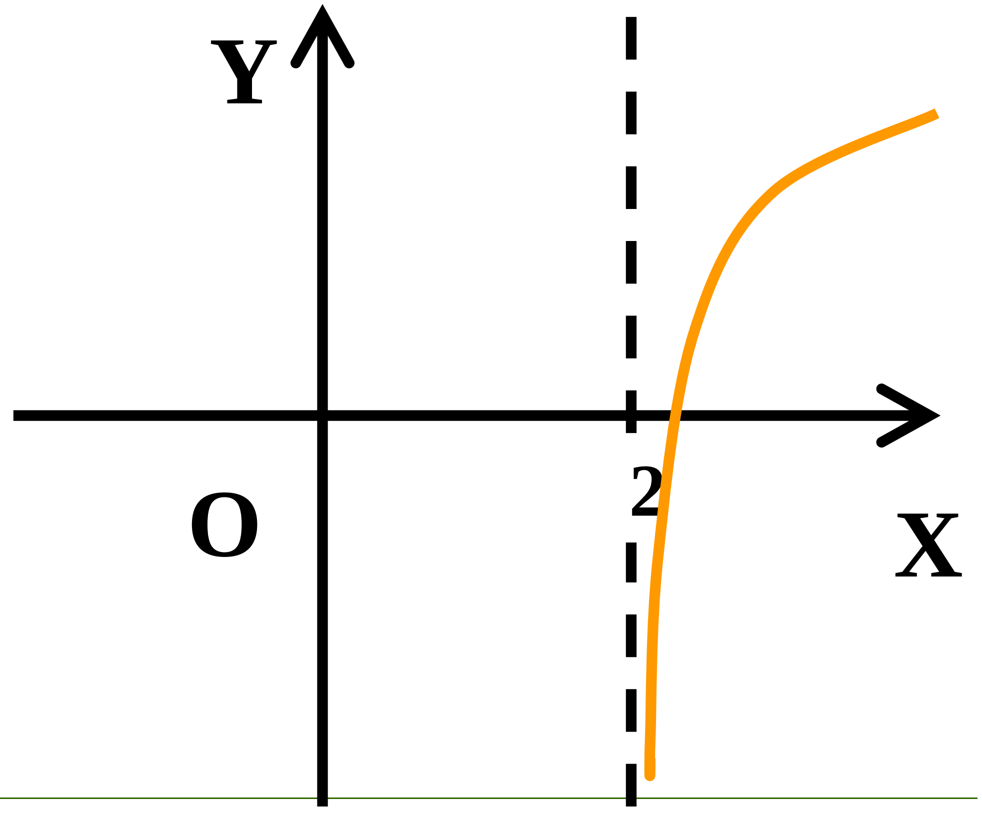
$x = 2$



Rys. 4

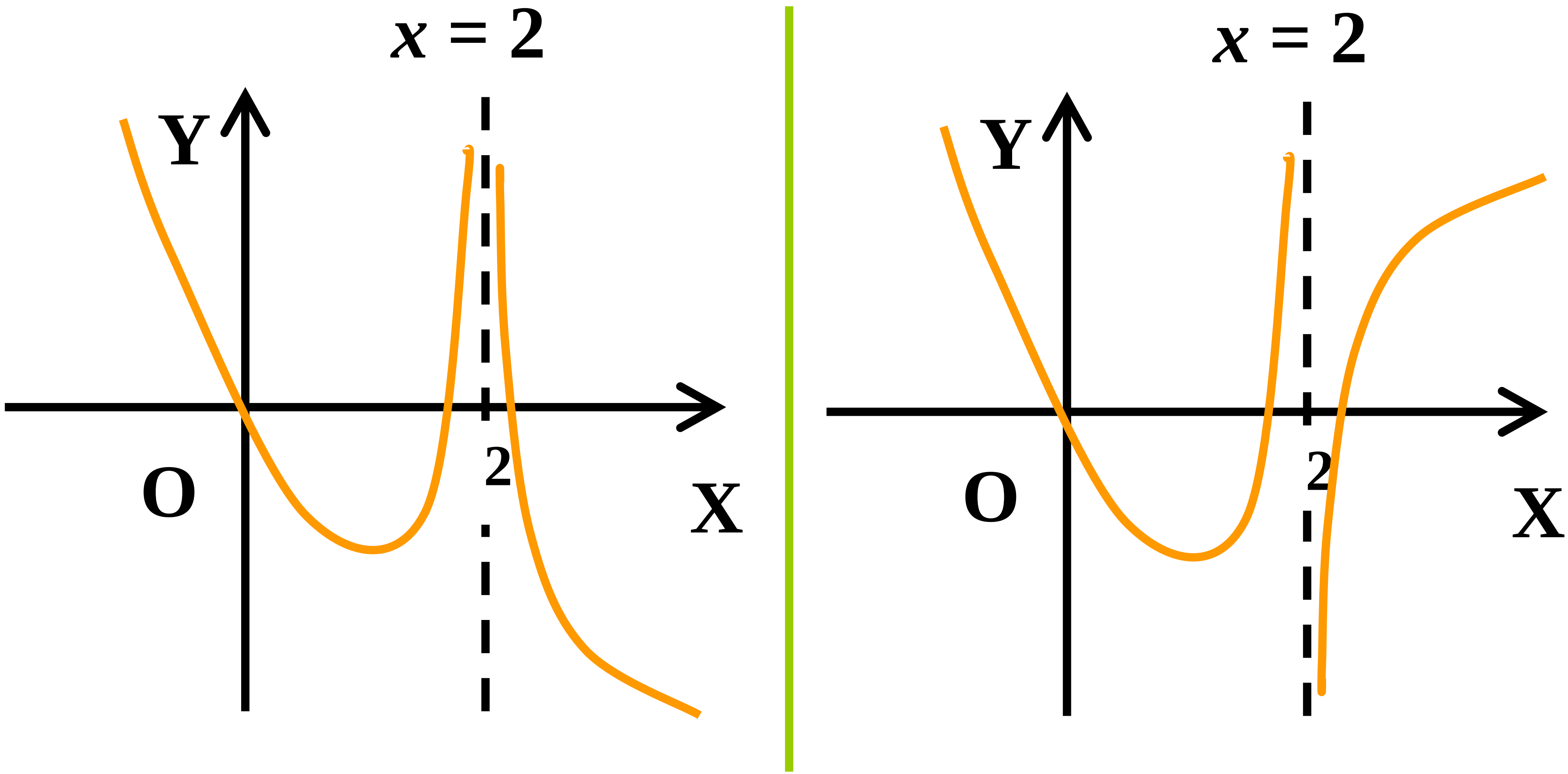
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

$x = 2$



Prosta o równaniu *x* = 2 jest asymptotą pionową obustronną funkcji *y* = *f* (*x*)

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \pm\infty \quad oraz \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \pm\infty$$



Definicje asymptot pionowych

Def. 1. Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Def. 2. Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

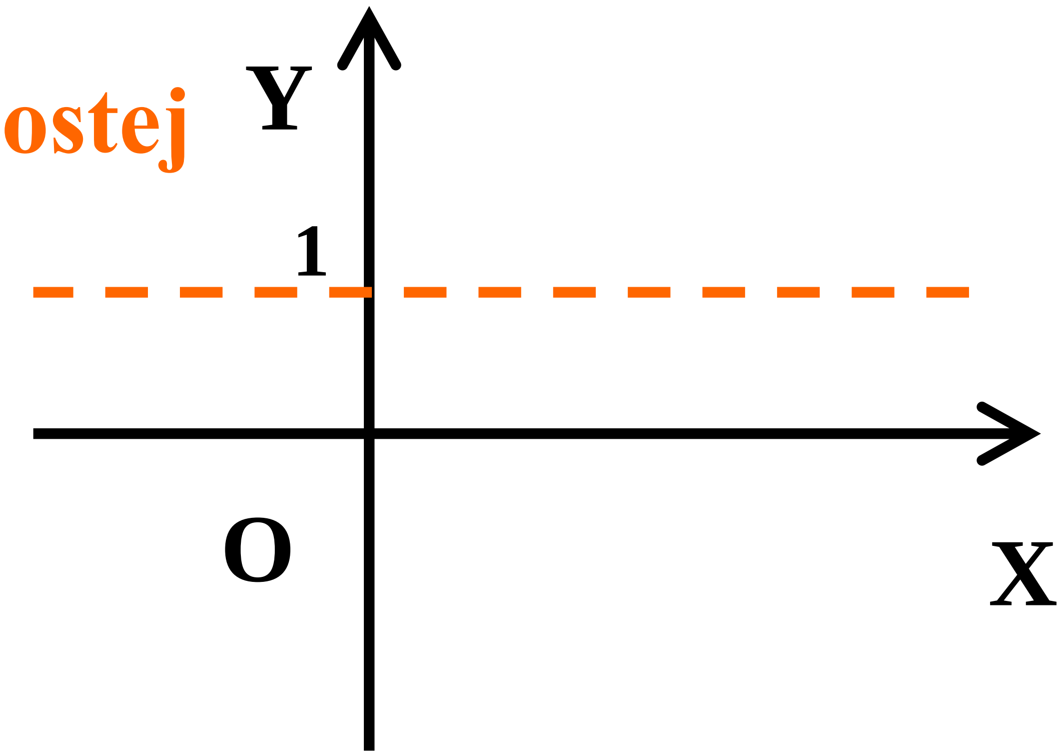
Def. 3. Prosta o równaniu $x=a$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

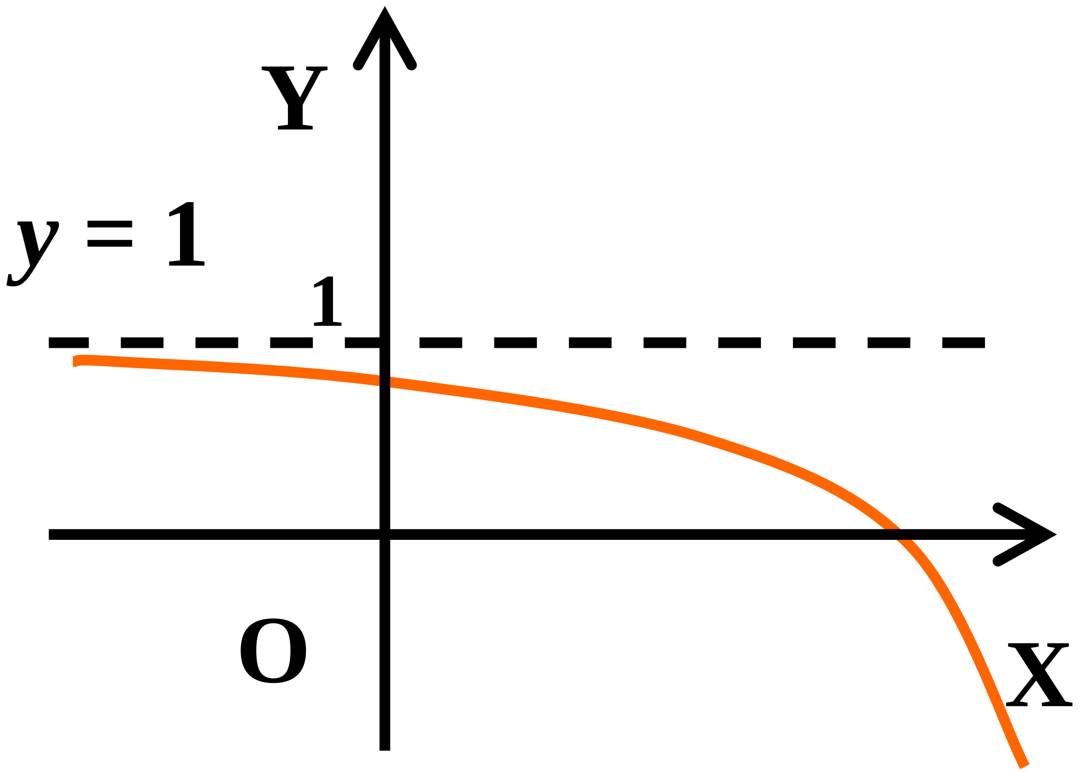
Asymptota pozioma

równanie prostej

$$y = 1$$

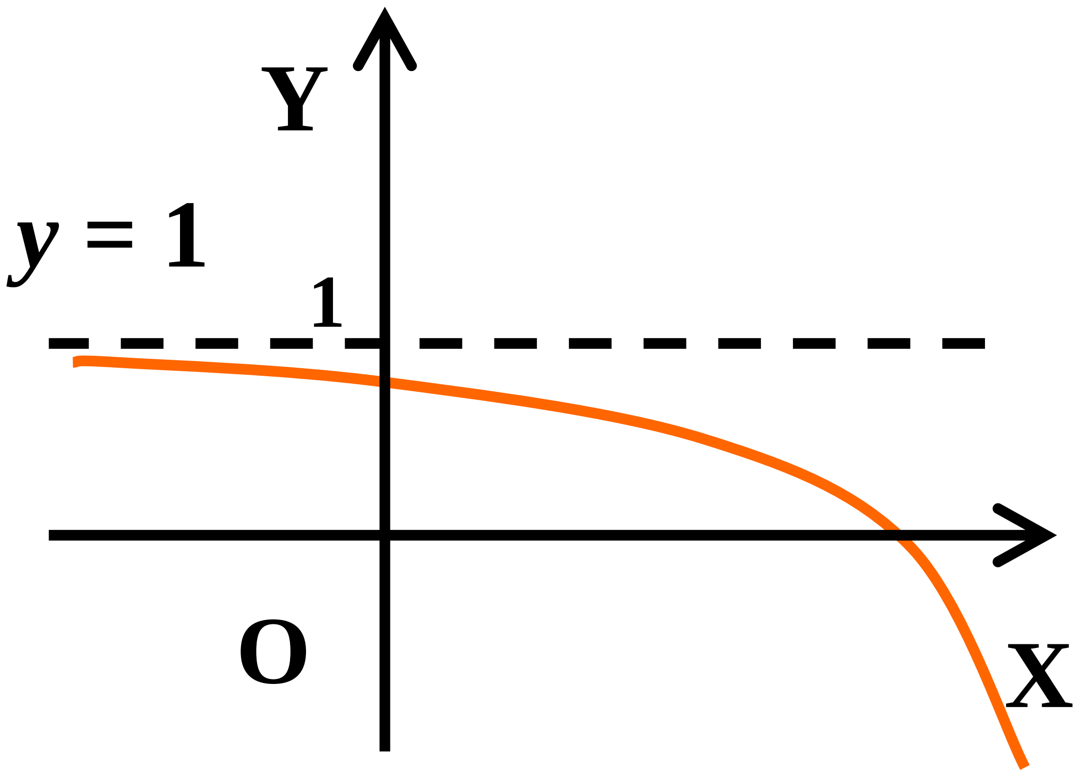


Asymptota pozioma



Asymptota pozioma

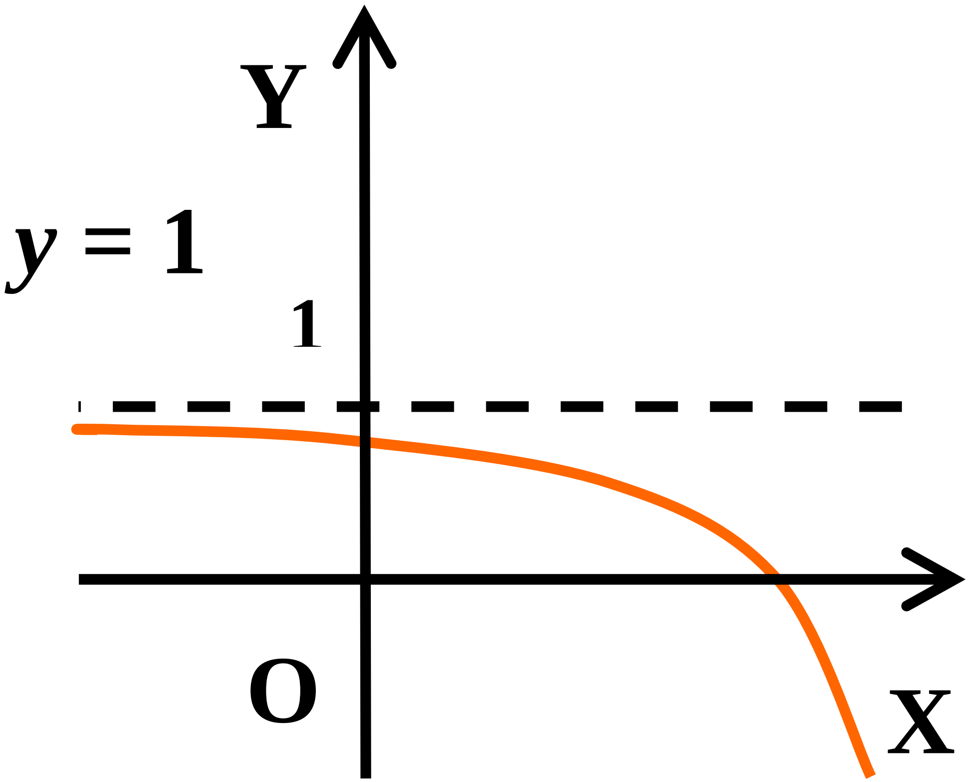
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Asymptota pozioma

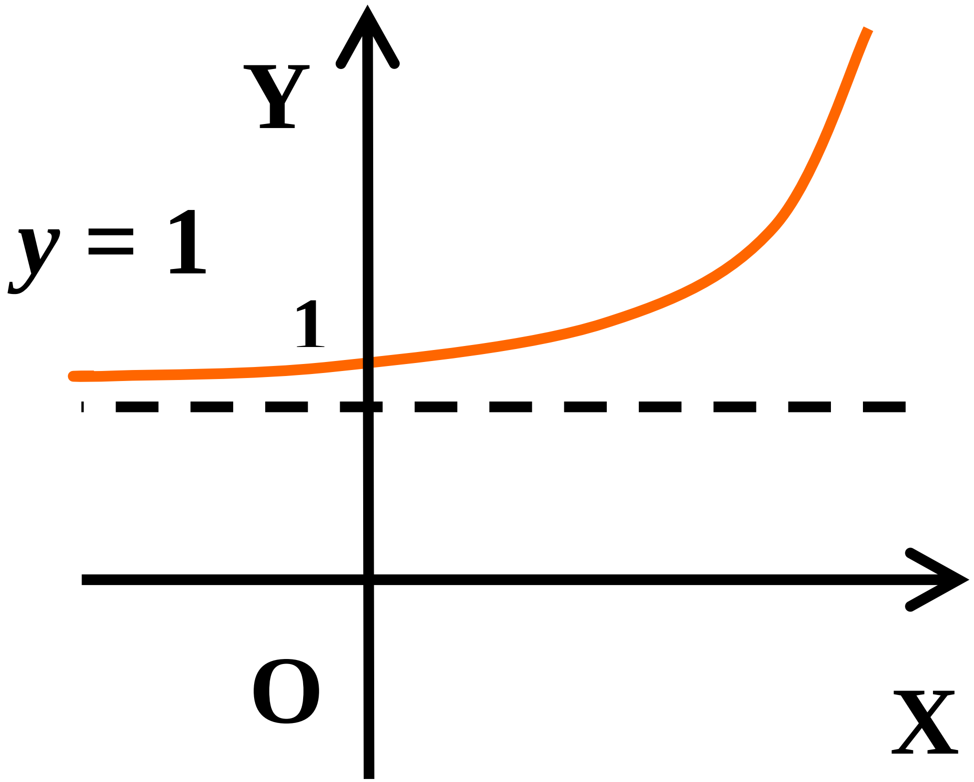
Rys. 5

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Rys. 6

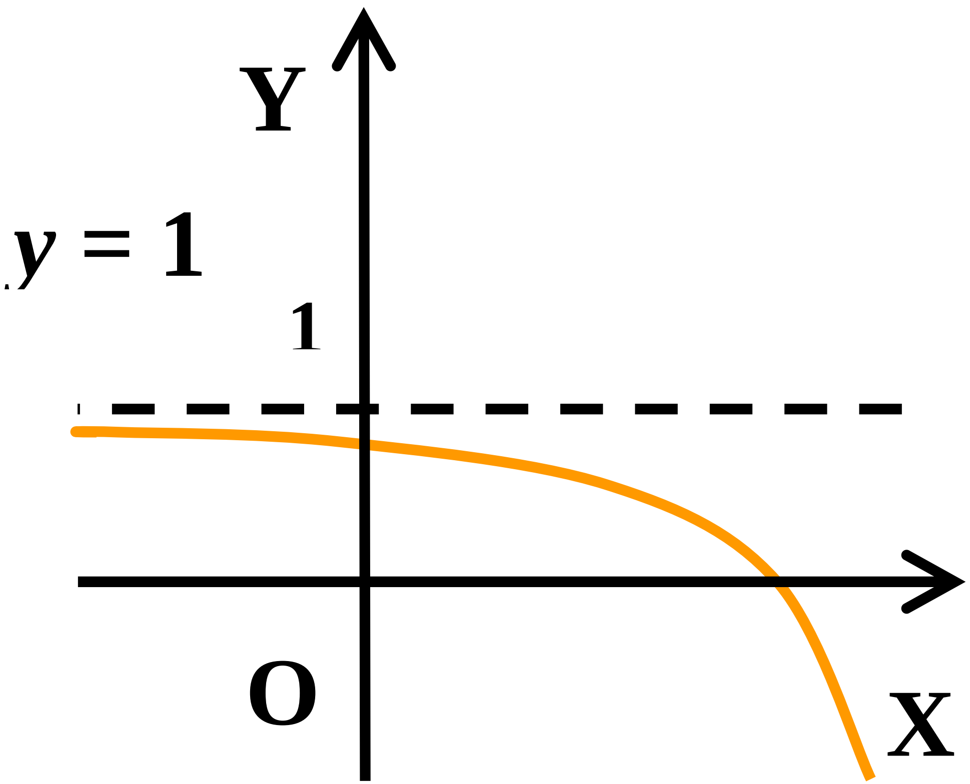
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Prosta o równaniu *y* = 1 jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji *y* = *f* (*x*)

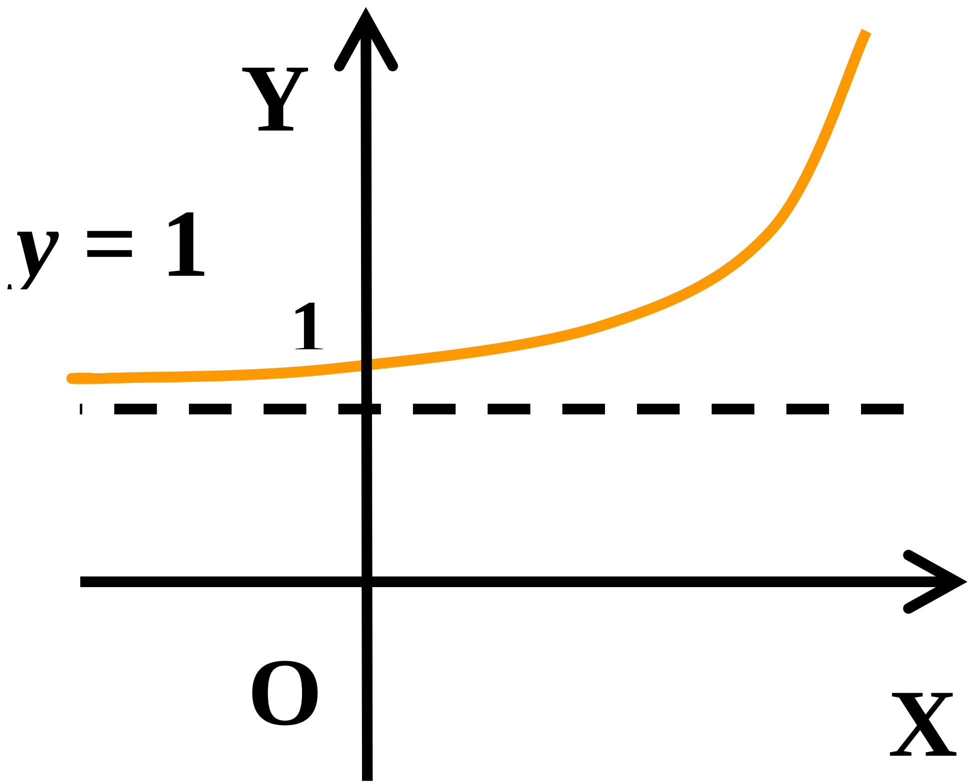
Rys. 5

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Rys. 6

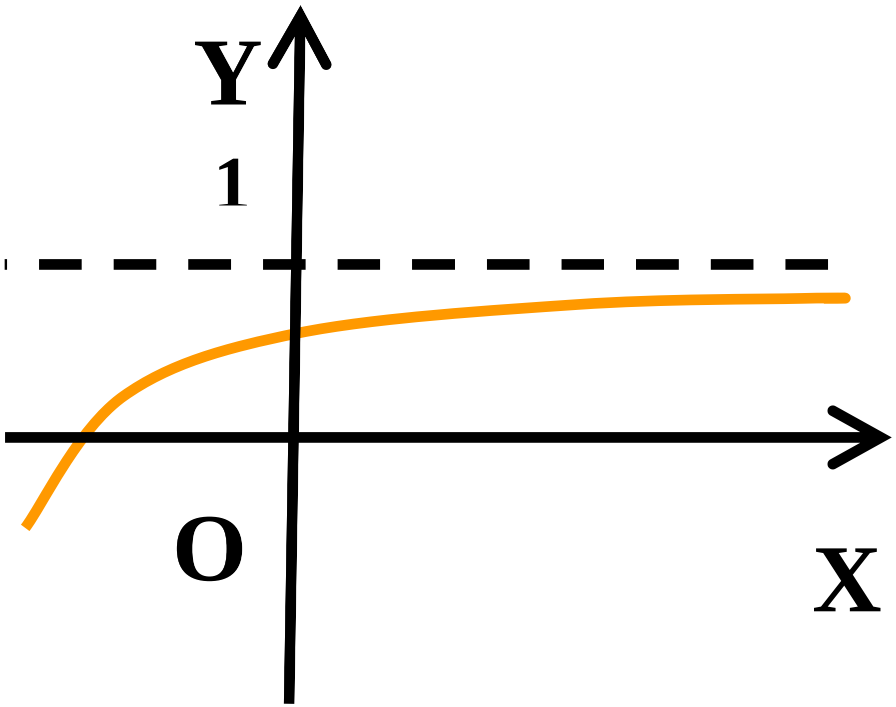
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$



Prosta o równaniu *y* = 1 jest asymptotą poziomą prawostronną funkcji *y* = *f* (*x*)

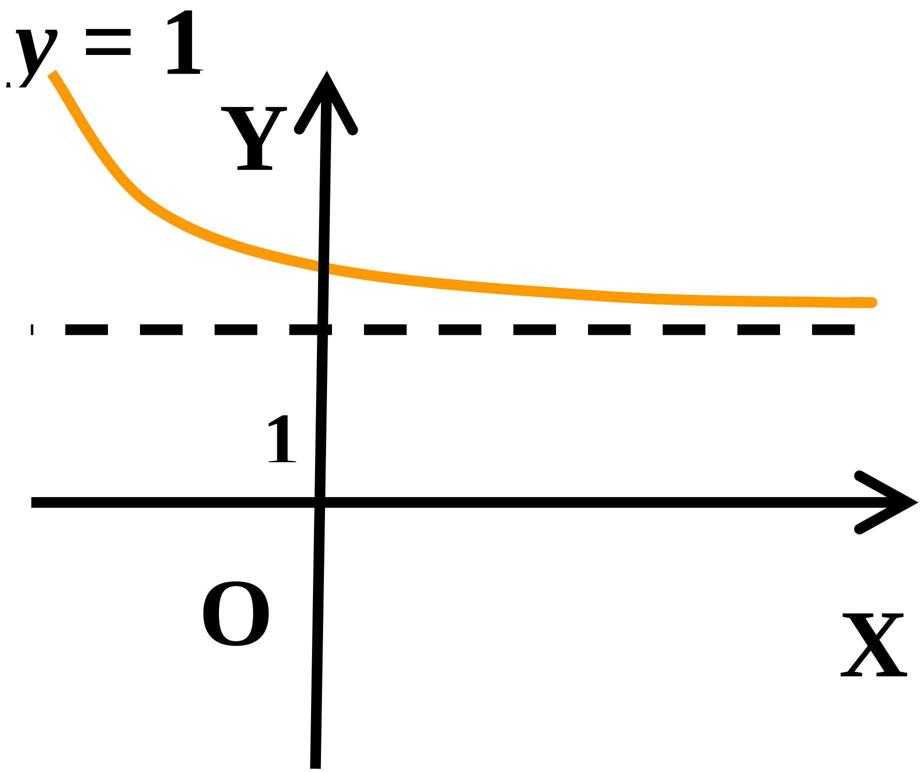
Rys. 7

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$



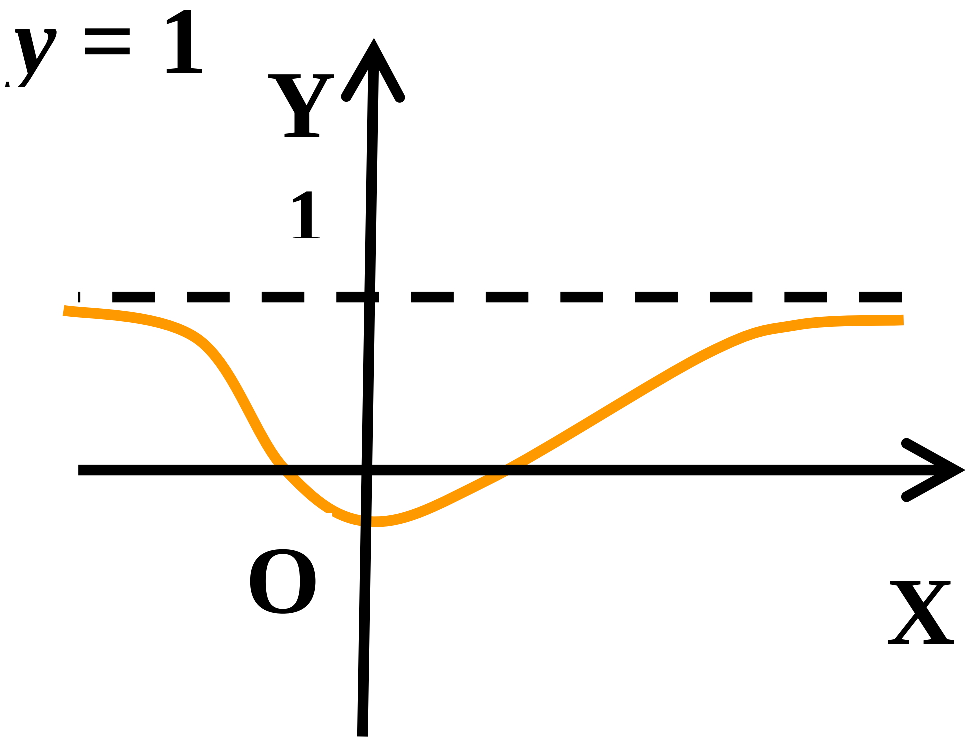
Rys. 8

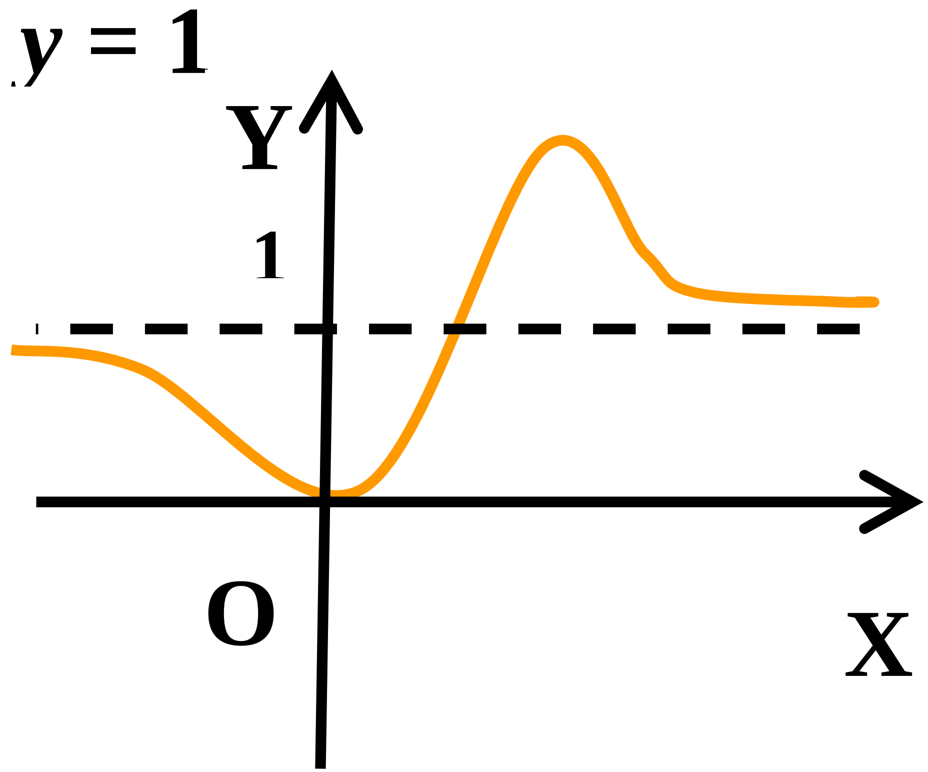
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$



Prosta o równaniu $y = 1$ jest asymptotą poziomą obustronną funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$





Definicje asymptot poziomych

Def. 1. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą prawostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Def. 2. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą lewostronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

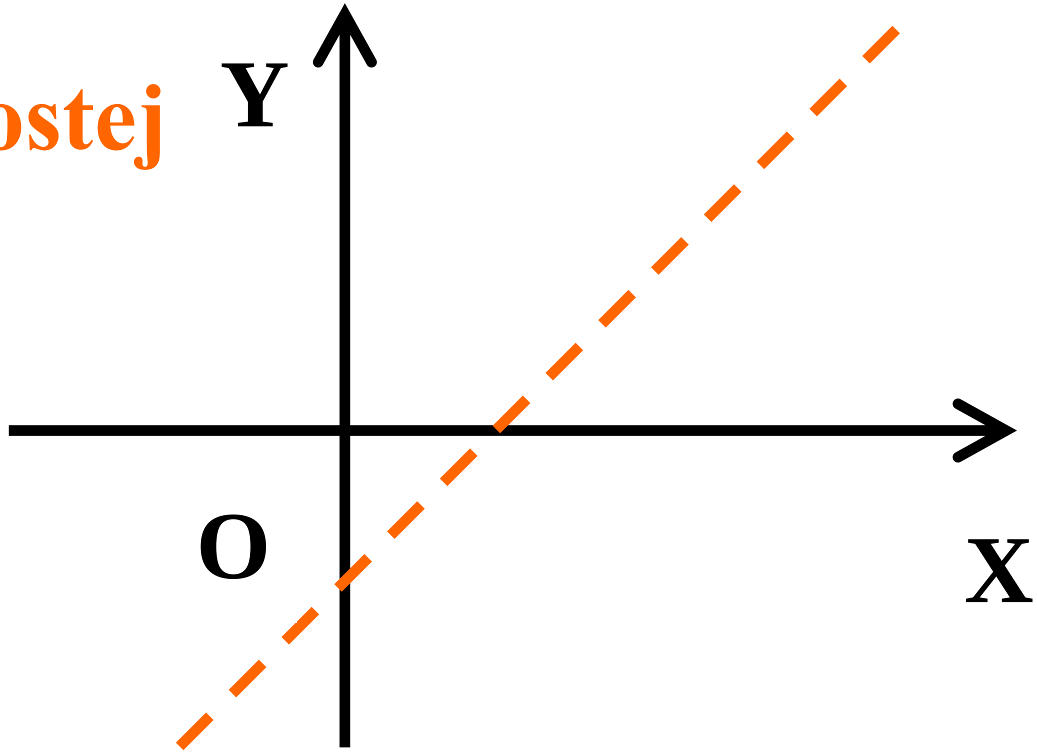
Def. 3. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą **poziomą obustronną** funkcji $y = f(x)$, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad i \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Asymptota ukośna

równanie prostej

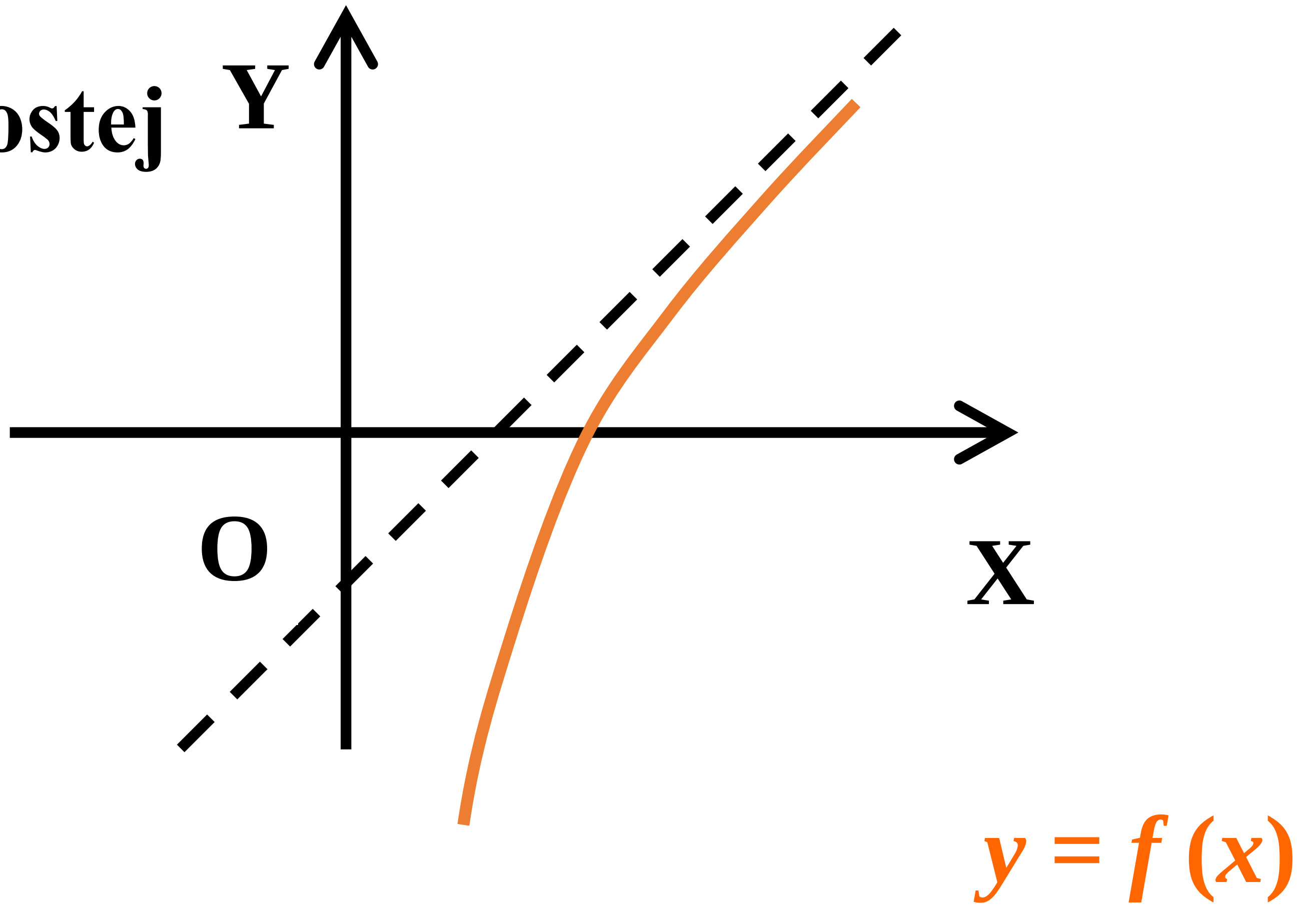
$$y = ax+b$$



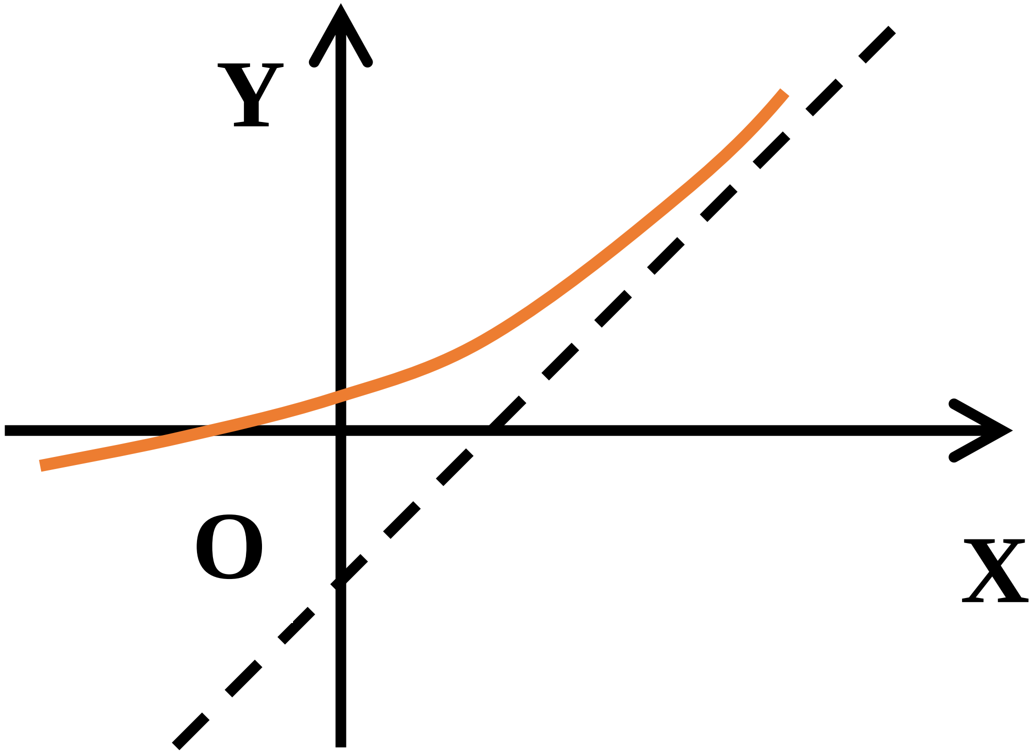
As. ukośna prawostronna

równanie prostej

$y = ax+b$



As. ukośna prawostronna



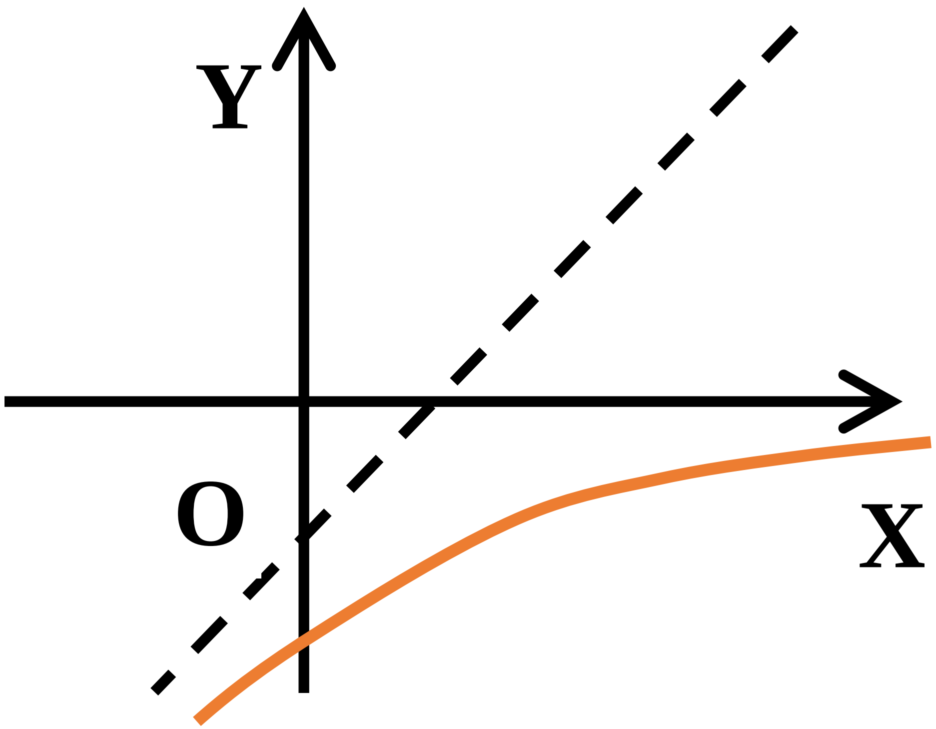
$y = f(x)$

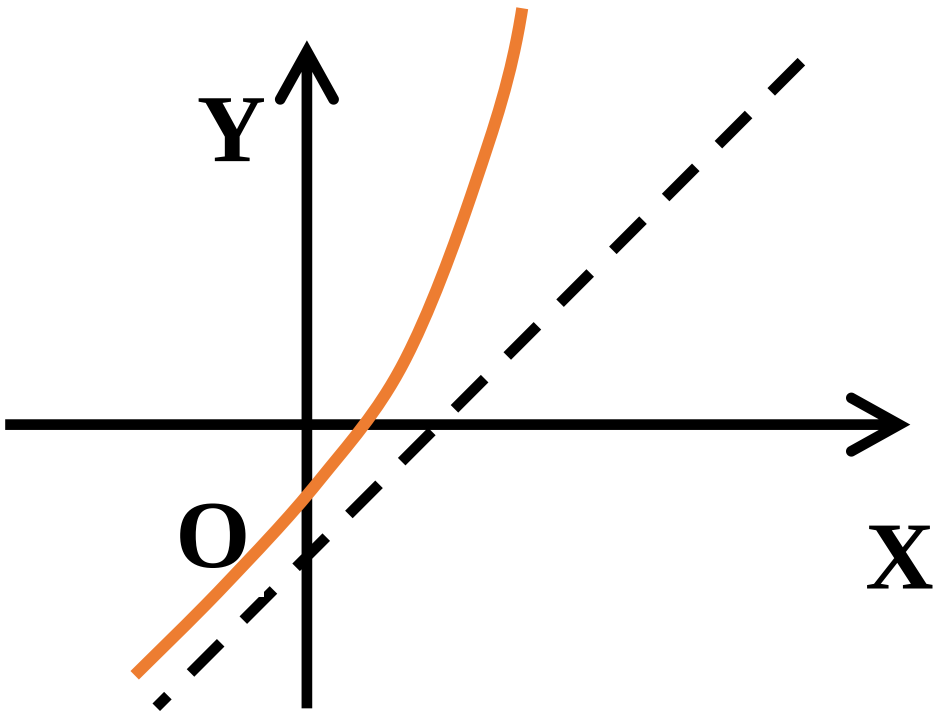
równanie prostej

$y = ax+b$

As. ukośna lewostronna

równanie prostej $y = ax+b$





Definicje asymptot ukośnych

Def. 1. **Prosta o równaniu *y* = ax+*b* jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji *y* = *f* (*x*), gdy**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ oraz } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b, \ (a,\ b - \text{skończone})$$

Def. 2. **Prosta o równaniu *y* = ax+*b* jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji *y* = *f* (*x*), gdy**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ oraz } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b \ , (a,\ b - \text{skończone})$$

Def. 3. **Prosta o równaniu *y* = ax+*b* jest asymptotą ukośną obustronną funkcji *y* = *f* (*x*), gdy**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ oraz } \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \ , (a,\ b - \text{skończone})$$