Temat wykładu:

Ciąg liczbowy. Granica ciągu

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie

pomarańczowy – uwaga

kursywa – komentarz

**** – materiał nadobowiązkowy***

Zagadnienia

1. Przykłady ciągów, definicja ciągu
2. Pojęcie granicy ciągu
3. Ciąg zbieżny, rozbieżny do ∞
4. Twierdzenia o granicach ciągów

<u>Przykład 1a.</u> Ciąg kolejnych liczb pierwszych mniejszych od 10:

1.	2.	3.	4.
2	3	5	7

ciąg liczbowy skończony

Przykład 1b. Dwa różne ciągi liczb pierwszych mniejszych od 10:

1.	2.	3.	4.
2	3	5	7

1.	2.	3.	4.
2	5	3	7

Przykład 2. Ciąg kolejnych liczb parzystych dodatnich

1.	2.	3.	4.	...
2	4	6	8	...

ciąg liczbowy nieskończony

Wprowadzenie do definicji ciągu

Określenie ciągu:

1.	2.	3.	...
A	*B*	*C*	...

Definicja ciągu (1a)

Jeśli każdej z liczb naturalnych:

1, 2, 3, ...

została przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista, to został określony ciąg (nieskończony) tych liczb rzeczywistych.

Definicja ciągu (1b)

Jeśli każdej z liczb naturalnych:

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

została przyporządkowana dokładnie jedna liczba rzeczywista, to został określony ciąg (skończony) tych liczb rzeczywistych.

Terminologia i oznaczenia

Ciąg oznaczamy:

$$(a_n) \text{ lub } \{a_n\}$$

a_1 – **1-szy wyraz ciągu**

a_2 – **2-gi wyraz ciągu**

itd.

a_n – **n-ty wyraz ciągu**

Terminologia na przykładzie

$$a_n = n^2+1$$

indeks wyrazu

a_n – wyraz ogólny ciągu

Czytamy:

ciąg o wyrazie ogólnym n^2+1

Przykłady określenia ciągu

1. Wyraz ogólny ciągu dany wzorem

$$a_n = \frac{2n+1}{3} \quad dla\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wyznaczanie wyrazów ciągu:

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1, \quad a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{3} = \frac{5}{3},$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}, \quad \ldots$$

Przykłady określenia ciągu cd.

2. Ciąg opisany warunkiem

(b_n) – ciąg kolejnych liczb pierwszych

$$b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 5, \quad \ldots$$

Wyznaczanie wyrazów ciągu:

b_n – nie dzieli się przez żaden wcześniejszy wyraz ciągu (b_n)

$$b_n = ?$$

Przykłady określenia ciągu cd.

3. Ciąg opisany wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + 8n \end{cases}$$

Wyznaczanie wyrazów ciągu:

$$c_2 = c_1 + 8 \cdot 1 = 9,$$
$$c_3 = c_2 + 8 \cdot 2 = 9 + 16 = 25, \ldots$$

Dowodzi się (indukcyjnie), że

$$c_n = (2n-1)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ciąg arytmetyczny – definicja

Ciąg (a_n) nazywamy arytmetycznym, gdy:

(wzór rekurencyjny)

$$\begin{cases} a_1 & \text{dany} \\ a_{n+1} = a_n + r, & n = 1, 2, 3, \ldots \quad r \in R \end{cases}$$

r – różnica ciągu arytmetycznego

(wzór na wyraz ogólny)

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad r \in R$$

Ciąg arytmetyczny – przykład

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

różnica r = 2

$$a_2 = 6, \quad a_3 = 8, \quad \dots$$

$$a_n = 4 + (n-1)\cdot 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_n = 4 + n\cdot 2 - 2 = 2n + 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ciąg geometryczny – definicja

Ciąg (a_n) nazywamy geometrycznym, gdy:

(wzór rekurencyjny)

$$\begin{cases} a_1 & dany \\ a_{n+1} = a_n \cdot q, & q \in R - \{0\}, \end{cases}$$

q – iloraz ciągu geometrycznego

(wzór na wyraz ogólny)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad q \in R - \{0\}$$

Ciąg geometryczny – przykład

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n \end{cases}$$

iloraz $\quad q = \frac{1}{3}$

$$a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{4}{9}, \quad a_3 = \frac{4}{27}, \ldots$$

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dokąd zmierzasz ciągu?

Dokąd zmierzasz ciągu?

Przykład 1.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Przykład 1.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

n	1	2	3	4	...
a_n	1	1/2	1/3	1/4	...

$$a_n \to 0$$

Przykład 1.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

n	1	2	3	4	...
a_n	1	1/2	1/3	1/4	...

$$a_n \to 0$$

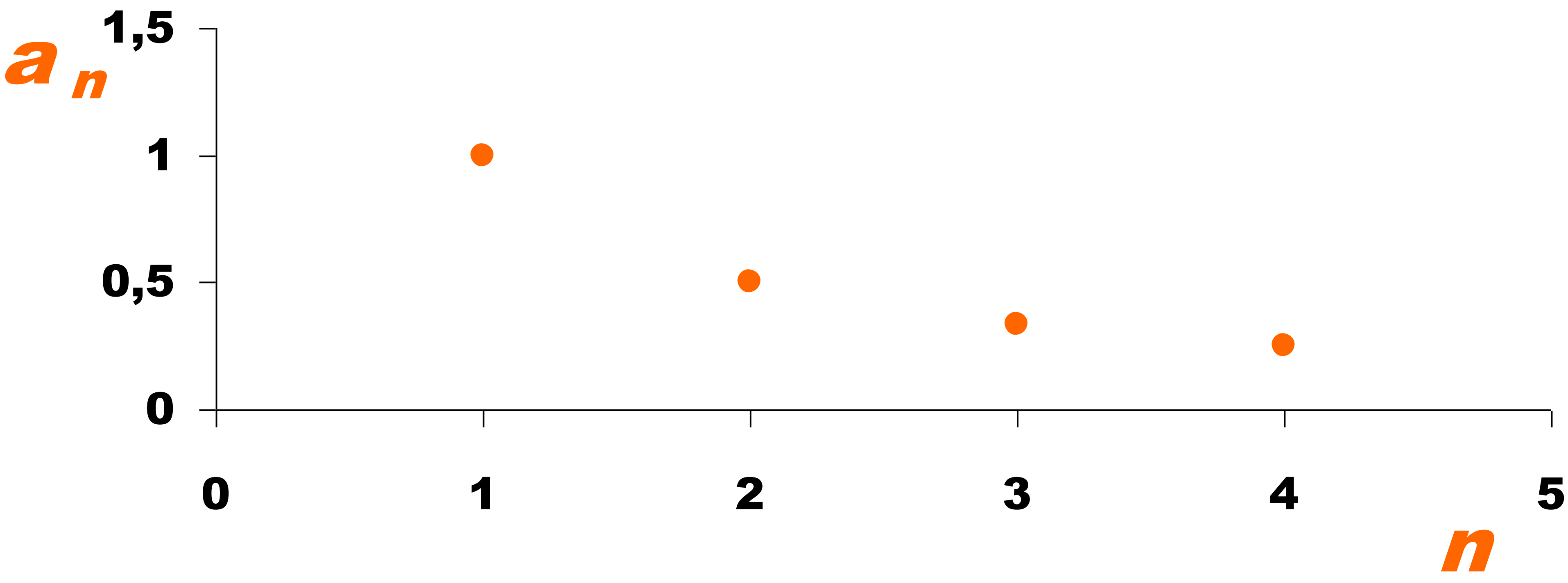
$$a_n \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

Przykład 1 - wykres

Przykład 1 - wykres

$$a_n = \frac{1}{n}$$

n	1	2	3	4
a_n	1	1/2	1/3	1/4



$$a_n \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

Dokąd zmierzasz ciągu?

Przykład 2.

$$a_n = n$$

Przykład 2.

$$a_n = n$$

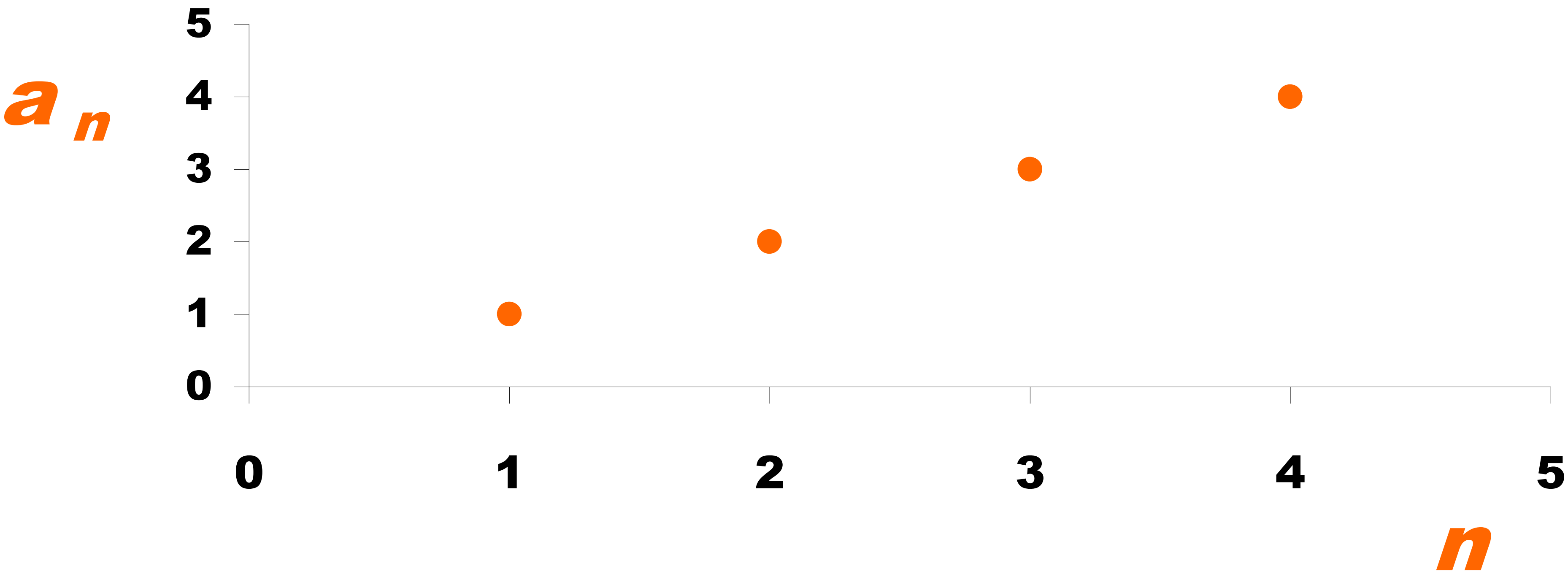
n	1	2	3	4	...
a_n	1	2	3	4	...

$$a_n \to \infty, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

Przykład 2 - wykres

$a_n = n$

n	1	2	3	4
a_n	1	2	3	4



$$a_n \to +\infty, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty$$

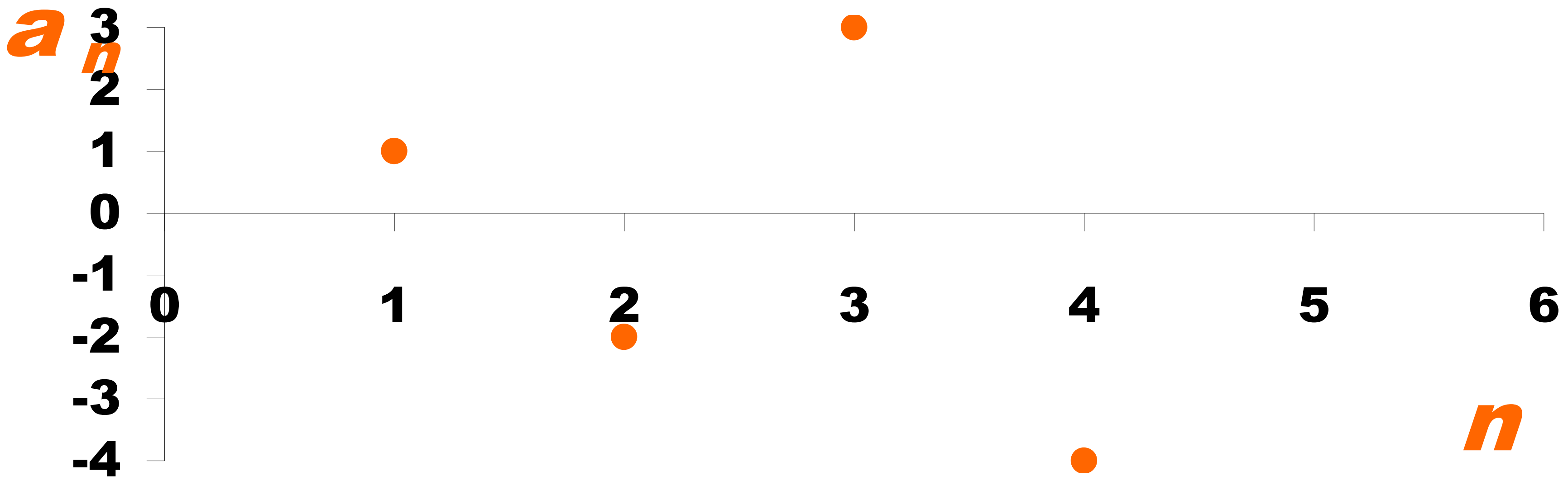
Przykład 3.

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

Przykład 3 - wykres

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

n	1	2	3	4
a_n	1	- 2	3	- 4



$$a_n \to ?$$

Terminologia na przykładzie

Zapis:

$$a_n \to 0$$

znaczenie:

wyrazy a_n zbliżają się do 0

czytamy:

ciąg (a_n) dąży do 0

wartość graniczna, granica

Terminologia na przykładzie

Zapis:

$$a_n \to 0$$

znaczenie:

wyrazy a_n zbliżają się do 0

czytamy:

ciąg (a_n) dąży do 0

lub

granicą ciągu (a_n) jest liczba 0

Oznaczenia na przykładzie

Zapis:

$$a_n \to 0$$

czytamy:

granicą ciągu (a_n) jest liczba 0

limes (*łac.*) – granica

Oznaczenia na przykładzie

Zapis:

$$a_n \to 0$$

czytamy:

granicą ciągu (a_n) jest liczba 0

limes (*łac.*) – granica

zapis:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Granica ciągu – oznaczenia

Ogólniej:

$$a_n \to g$$

czytamy:

granicą ciągu (a_n) jest liczba g

zapis:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = g$$

Granica ciągu – przedstawienie graficzne

* Definicja Heinego granicy ciągu

Dla danego ciągu (a_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \overset{def}{\Leftrightarrow} \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{k\in N^+}{\exists}\ \underset{n>k}{\forall}\ |a_n - g| < \varepsilon$$

Twierdzenia o granicach ciągów

Twierdzenia o granicach ciągów

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} c = c, \qquad c = \text{const}, \; c \in R \tag{2}$$

Gdy granicą ciągu jest liczba skończona, to mówimy, że ciąg ma granicę właściwą.

Ciąg taki nazywamy zbieżnym.

Przykłady:

a) $a_n = \frac{1}{n}$

b) $b_n = 2$

Ciąg dążący do ∞

* Definicja ciągu dążącego do + ∞

Dla danego ciągu (a_n)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \underset{M \in R}{\forall} \ \underset{k \in N^+}{\exists} \ \underset{n > k}{\forall} \ a_n > M$$

* Definicja ciągu dążącego do - ∞

Dla danego ciągu (a_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \underset{M\in R}{\forall} \ \underset{k\in N^+}{\exists} \ \underset{n>k}{\forall} \ a_n < M$$

Twierdzenia o granicach ciągów

$$\lim_{n \to \infty} n = +\infty \qquad (3)$$

$$\lim_{n \to \infty} (-n) = -\infty \qquad (4)$$

Terminologia i przykłady

Gdy granicą ciągu jest + ∞ lub – ∞, to mówimy, że ciąg ma granicę niewłaściwą.

Ciąg taki nazywamy rozbieżnym do + ∞ lub – ∞.

Przykłady:

a) $a_n = n$

b) $b_n = -n$

Terminologia i przykłady

Gdy granica ciągu nie istnieje, to mówimy, że ciąg jest rozbieżny.

Przykłady:

a) $$a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

b) $$b_n = (-1)^n$$

Twierdzenia o granicach ciągów

$$\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty\,, \quad \text{gdy } k > 0 \qquad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty} k^n = +\infty\,, \quad \text{gdy } k > 1 \qquad (6)$$

$$\lim_{n\to\infty} k^n = 0\,, \quad \text{gdy } |k| < 1 \qquad (7)$$

* Twierdzenia o granicach ciągów

Ogólniej:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,k} = +\infty \text{ , gdy } a_n \to +\infty \text{ , } k > 0 \qquad (8)$$

$$\lim_{n\to\infty} k^{a_n} = +\infty \text{ , gdy } a_n \to +\infty \text{ , } k > 1 \qquad (9)$$

$$\lim_{n\to\infty} k^{a_n} = 0 \text{ , gdy } a_n \to +\infty \text{ , } |k| < 1 \qquad (10)$$

Twierdzenia o granicach ciągów

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \qquad (11)$$

Ogólniej:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e\text{, gdy } a_n\to+\infty \qquad (12)$$

Twierdzenia o ciągach zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ **oraz** a, b

są skończone, to:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad (13)$$

Twierdzenia o ciągach zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ **oraz** a, b

są skończone, to:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \qquad (14)$$

Twierdzenia o ciągach zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ **oraz** a, b

są skończone, to:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b \qquad (15)$$

Twierdzenia o ciągach zbieżnych

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ **oraz** a, b **są skończone, to:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{gdy} \quad \forall_{n\in N^+}\ b_n \neq 0 \ \text{ oraz } \ b \neq 0 \qquad (16)$$

* Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = g, \; a_n \le b_n \le c_n,$$

to:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g \qquad (17)$$

Tw. o ciągach rozbieżnych do ∞

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, **to**

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = +\infty \qquad (18)$$

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, **to**

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = -\infty \qquad (19)$$

Tw. o ciągach rozbieżnych do ∞

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

b **- skończona, to** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = +\infty$ **(20)**

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,

b **- skończona, to** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right) = -\infty$ **(21)**

Tw. o ciągach rozbieżnych do ∞

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a **– skończona**

i $a \neq 0$, **oraz** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, **to** **(22)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right) = \pm\infty$$ **znak zgodny z regułą znaków**

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a **– skończona,**

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, **to** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ **(23)**