

Temat wykładu:

Macierz. Wyznacznik macierzy. Układ równań liniowych

Kody kolorów:

żółty – nowe pojęcie

pomarańczowy – uwaga

kursywa – komentarz

* – materiał nadobowiązkowy

Zagadnienia

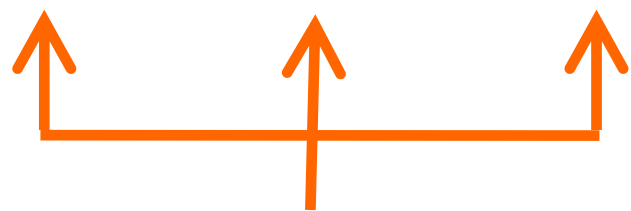
- 1. Pojęcia**
- 2. Działania na macierzach**
- 3. Wyznacznik macierzy**
- 4. Macierzowy zapis układu równań liniowych**
- 5. Układ Cramera. Wzory Cramera**

Pojęcie macierzy

Macierz to prostokątna tablica, w której można wyróżnić wiersze i kolumny.

Przykład zapisu macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$



3 kolumny



2 wiersze

Macierze zapisuje się w nawiasach kwadratowych.

Pojęcie macierzy cd.

Na przecięciu wiersza i kolumny zapisany jest **element** macierzy.

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Elementami macierzy mogą być np.: liczby, funkcje, inne macierze.

Na każdym przecięciu wiersza i kolumny zapisany jest pewien element macierzy.

Wymiar macierzy

Jeśli macierz ma m wierszy i n kolumn, to mówimy, że jest **wymiaru $m \times n$** (czyt.: m na n).

Przykład:

4 wiersze, 2 kolumny

wymiar macierzy: 4×2
(czyt.: cztery na dwa)

$$\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 2 & 3 \\ -0,3 & \pi \\ 4,5 & -5,2 \end{bmatrix}$$

4×2

Przykład

Zapisz wymiary danych macierzy.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 x 2

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1,7 \\ 13 \\ 2,5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5 x 1 (wektor kolumnowy)

$$[2 \quad -4 \quad 0,2 \quad -3]$$

1 x 4 (wektor wierszowy)

$$[-11]$$

1 x 1

Oznaczenia macierzy

Macierze oznacza się dużymi literami:

A, B, \dots lub A_1, A_2, \dots

lub

$[a_{ij}], \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

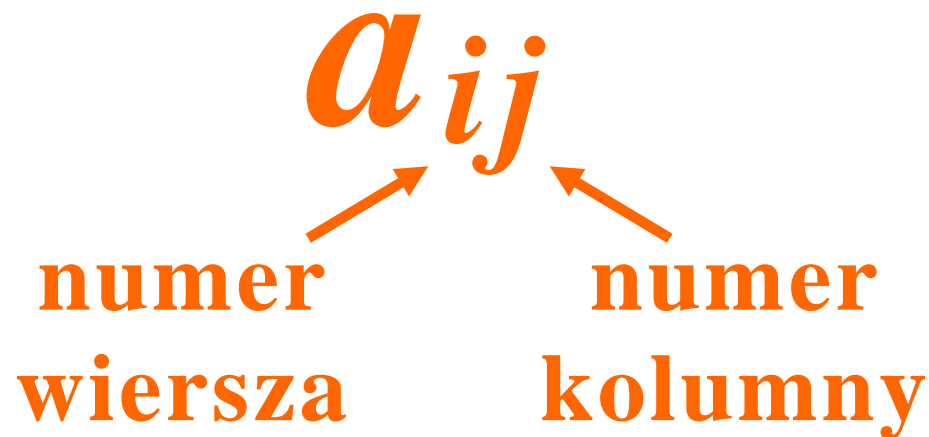
Identyfikowanie elementów macierzy

A – macierz wymiaru $m \times n$,

a_{ij} – element macierzy A leżący na

przecięciu i -tego wiersza z j -tą kolumną,

gdzie $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.



Przykład 1

Dana jest macierz A . Zapisz każdy element a_{ij} , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1, cd.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = -1$$

$$a_{21} = 2$$

$$a_{11} = 3$$

$$a_{22} = 1$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = 1$$

Przykład 2

Dane są elementy macierzy B . Zapisz macierz.

$$b_{11} = 2, b_{12} = -3, b_{13} = 4, b_{14} = -1,$$

$$b_{21} = 1, b_{22} = 5, b_{23} = -7, b_{24} = 0$$

Przykład 2, cd.

$$b_{11} = 2, b_{12} = -3, b_{13} = 4, b_{14} = -1,$$

$$b_{21} = 1, b_{22} = 5, b_{23} = -7, b_{24} = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Wybrane postacie macierzy

Jeśli w macierzy $A_{m \times n}$ liczba wierszy m jest równa liczbie kolumn n , to macierz A nazywamy **kwadratową stopnia n** ;

ozn.: A_n

Przykłady macierzy kwadratowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

stopnia 2

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

stopnia 3

Przykład

Zapisz macierz kwadratową A_n w postaci ogólnej.

Zapis macierzy A_n na tablicy.

Przekątna macierzy kwadratowej

W macierzy kwadratowej stopnia n elementy a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ tworzą **główną przekątną**.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**przekątna (główna)
macierzy A_n**

Postacie macierzy kwadratowych cd.

Macierz jednostkowa stopnia n , ozn. I_n :

macierz z jedynkami na przekątnej głównej oraz zerami poza przekątną.

$$a_{ii} = 1 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykłady na tablicy.

Równość macierzy

Macierze $A_{m \times n}$ oraz $B_{p \times q}$ są **równe**, gdy ich wymiary są jednakowe oraz odpowiadające elementy są równe, czyli $m = p$ i $n = q$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Przykład

Dane są macierze A , B , C , D . Podaj warunki, przy których zachodzą równości: $A = B$, $C = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x & -1 & y \\ 0 & z & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

- **Dodawanie, odejmowanie**
- **Mnożenie macierzy przez liczbę**
- **Transponowanie**
- **Mnożenie macierzy przez macierz**

Przykłady na tablicy.

Dodawanie macierzy

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Odejmowanie macierzy

$$A_{m \times n} - B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Mnożenie macierzy przez liczbę

$$k \cdot A_{m \times n} = C_{m \times n}$$

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

krótszy zapis:

$$k \cdot [a_{ij}] = [k \cdot a_{ij}]$$

$$i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Transponowanie macierzy

$$(A_{m \times n})^T = C_{n \times m}$$

$$c_{ij} = a^T_{ij} = a_{ji} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}]^T = [a^T_{ji}]$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Mnożenie macierzy przez macierz

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$$

krótszy zapis:

$$[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right]$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$$

Własność macierzy I

Dla dowolnej macierzy $A_{m \times n}$ zachodzą równości:

$$A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$$

$$I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$$

Zatem macierz I jest elementem obojętnym mnożenia macierzy.

Przykłady na tablicy.

Kolejność działań

- **Mnożenie przed dodawaniem i odejmowaniem**
- **Transponowanie przed innymi działaniami**
- **Najpierw działania w nawiasach**

Przykład na tablicy.

Prawa działań na macierzach

Ozn.: A, B, C, D – macierze, k – liczba rzeczywista.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A + B = B + A$$

Uwaga. *Mnożenie macierzy nie jest przemienne.*

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

Prawa działań na macierzach, cd.

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Zadania

Zadania w pliku

Zadania_macierze_dzialania.pdf

Uwaga

Do działań na macierzach można wykorzystać funkcje arkusza kalkulacyjnego (np. CALC, EXCEL):

- **MACIERZ.ILOCZYN**
- **TRANSPONUJ**

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy kwadratowej A_n

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej A jest pewna liczba jednoznacznie przyporządkowana tej macierzy;

ozn.: $\det A$ (ang. determinant), $|A|$.

Liczbę tą definiuje się podając metodę jej obliczenia dla macierzy kwadratowej stopnia n , przy $n = 1, 2, \dots$

Obliczanie wyznacznika – metoda Laplace'a

Dla $n = 1, 2, \dots$ wyznacznik macierzy A_n oblicza się metodą Laplace'a rozwijania wyznacznika względem wiersza lub kolumny macierzy A_n .

Dla $n = 2$ oraz $n = 3$ metodę Laplace'a można przedstawić w postaci uproszczonej.

Obliczanie $\det A_1$

Dla $n = 1$:

$$\det [a_{11}] = a_{11}$$

Przykłady:

$$\det [-3] = -3$$

$$\det [12] = 12$$

Obliczanie $\det A_2$

Dla $n = 2$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

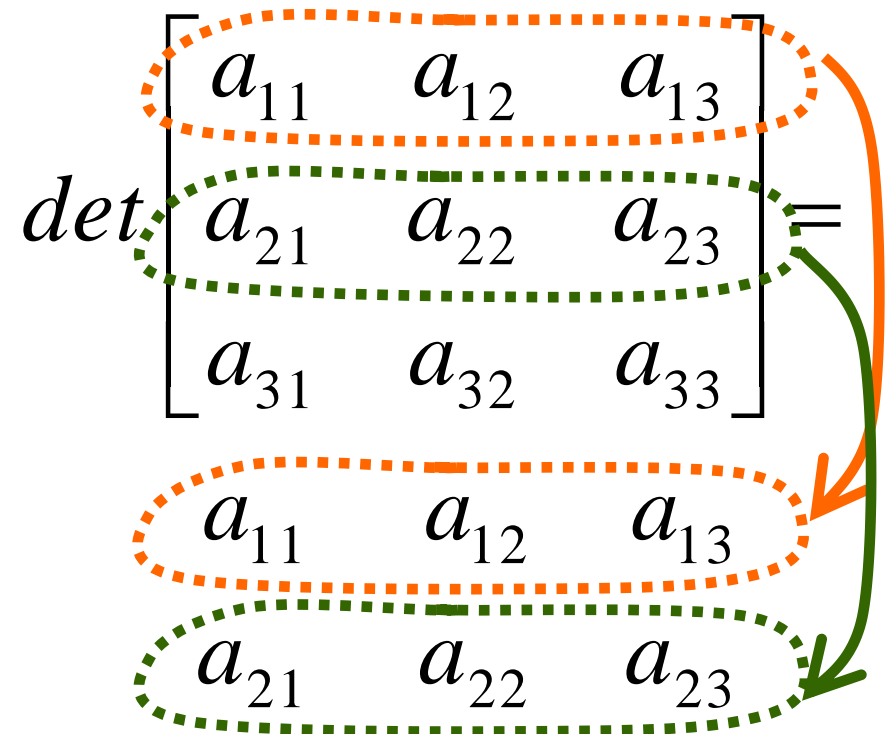
Przykład:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$$

Obliczanie $\det A_3$ - schemat Sarrusa

Dla $n = 3$ wyznacznik można obliczyć stosując **schemat Sarrusa**:

1. Pod trzecim wierszem przepisać pierwszy wiersz, a pod nim drugi.



Obliczanie $\det A_3$ - schemat Sarrusa cd.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$

$a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$

2. Obliczyć iloczyny elementów na przekątnej głównej i dwóch przekątnych równoległych do niej; niech S_g oznacza sumę tych iloczynów.

suma $S_g = \dots$

Obliczanie $\det A_3$ - schemat Sarrusa cd.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

$$a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\text{suma } S_d = \dots$$

3. Obliczyć iloczyny elementów na drugiej przekątnej i dwóch przekątnych równoległych do niej; niech S_d oznacza sumę tych iloczynów.

Obliczanie $\det A_3$ - schemat Sarrusa cd.

$$4. \quad \det A = S_g - S_d$$

Uwaga

Zamiast dopisywać dwa pierwsze wiersze pod trzecim, można dopisać dwie pierwsze kolumny za trzecią lub wyznaczyć pewne „trójkąty” w macierzy. Wszystkie te graficzne sposoby służą ułatwieniu zapamiętania i stosowania podanego dalej wzoru.

Obliczanie $\det A_3$

Wzór na $\det A_3$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = S_g - S_d,$$

gdzie:

$$S_g = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

$$S_d = a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}$$

Przykład na tablicy.

Przykład

Oblicz wyznacznik danej macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 11 - (-6) = 17$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \hline -2 & & 8 \end{array} \end{array}$$

$$S_d = -6$$

$$S_g = 11$$

Obliczanie wyznacznika macierzy A_n

Metoda Laplace'a rozwijania wyznacznika względem i -tego (**dowolnego**) wiersza macierzy A_n

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \det A_{i1} +$$
$$+ a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \det A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot \det A_{in}$$

gdzie A_{ij} jest macierzą, która powstaje po wykreśleniu z macierzy A i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Przykład

Oblicz wyznacznik danej macierzy A .
Polecenie można wykonać wybierając
rozwiniecie względem np. **drugiego**
wiersza.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \underline{3} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \\
 + \underline{(-1)} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} &+ \underline{1} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 + \underline{0} \cdot (-1)^{2+4} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} &=
 \end{aligned}$$

Przykład

$$= 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 0 =$$

Wyznaczniki zakreślonych macierzy można policzyć wg schematu Sarrusa lub ogólną metodą Laplace'a.

$$= 3 \cdot (-1) \cdot (-33) + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 6 = 90$$

Odp.: $\det A = 90$.



Własności wyznacznika

- 1. Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej (dolnej) jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej.**
- 2. Jeżeli macierz kwadratowa ma w pewnym wierszu (lub kolumnie) same zera, to jej wyznacznik jest równy zeru.**

* Własności wyznacznika cd.

3. Jeżeli dwa wiersze (lub kolumny) macierzy kwadratowej są proporcjonalne, to jej wyznacznik jest równy zero.

4. Wyznacznik macierzy jednostkowej dowolnego stopnia jest równy jeden.

$$\det I_n = 1$$

5. Wyznaczniki macierzy A oraz A^T są równe.

$$\det A = \det A^T$$



Własności wyznacznika cd.

6. Dla macierzy A stopnia n :

$$\det (k \cdot A) = k^n \cdot \det A, \quad k \in R$$

7. Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia jest równy iloczynowi wyznaczników tych macierzy:

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Macierz osobliwa, nieosobliwa

Macierz kwadratową A nazywamy **osobliwą**, gdy **$\det A = 0$** .

Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, gdy **$\det A \neq 0$** .

Zadania

Zadania w pliku

Zadania_macierze_wyznacznik.pdf

Uwaga

Do obliczania wyznacznika macierzy można wykorzystać funkcję arkusza kalkulacyjnego (np. CALC, EXCEL):

WYZNACZNIK.MACIERZY

Układ równań liniowych

Zagadnienia – Układy równań liniowych

- 1. Zapis macierzowy układu równań**
- 2. Układ Cramera**
- 3. Wzory Cramera**

Wprowadzenie

Przykład 1.

Dla danych macierzy A , x , b wykonaj:

a) oblicz iloczyn $A \cdot x$,

b) zapisz warunki, przy których zachodzi równanie $Ax = b$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1. cd.

$$A_{3 \times 4} \cdot x_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-1) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + (-2) \cdot x_4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-2) \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 \\ 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Przykład 1. cd.

$$Ax = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$Ax = b$
układ równań liniowych
w zapisie macierzowym

układ równań liniowych
w zapisie klasycznym



Przykład 2.

Dany układ równań zapisz w postaci macierzowej.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Przykład 2. cd.

Macierzowy zapis układu równań: $Ax = b$.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Układ równań zapisany z wyszczególnieniem współczynnika przy każdej niewiadomej:

$$\begin{cases} (-1) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + (-2) \cdot x_4 = -5 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-2) \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 1 \\ 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

Przykład 2. cd.

$$\begin{cases} (-1) \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + (-2) \cdot x_4 = -5 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-2) \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 1 \\ 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + (-1) \cdot x_4 = 1 \end{cases}$$

x_1 x_2 x_3 x_4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

można zapisać w postaci $Ax = b$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Zapis macierzowy układu równań liniowych cd.

W odniesieniu do układu równań liniowych w postaci $Ax = b$, stosowane są określenia:

A - macierz układu (wymiar $m \times n$)

x - wektor niewiadomych (wymiar $n \times 1$)

b - wektor prawych stron (wymiar $m \times 1$)

Układ równań liniowych Cramera

Układ równań liniowych

$$Ax = b$$

nazywa się **układem Cramera**, jeśli macierz układu A jest **kwadratowa i nieosobliwa**.

Układ Cramera posiada **dokładnie jedno rozwiązanie**.

Uwaga na tablicy.

Metody rozwiązywania układu Cramera

- **wzory Cramera**
- **metoda macierzy odwrotnej ***

Wzory Cramera

Rozwiązanie układu równań Cramera $Ax = b$,
gdzie:

A – macierz stopnia n ,

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$,

podają wzory Cramera:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie: A_i - macierz powstała po zastąpieniu
 i -tej kolumny macierzy A kolumną
prawych stron b .

Przykład

Wyznacz rozwiązanie układu równań przy użyciu wzorów Cramera.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Postać macierzowa układu, to $Ax=b$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład cd.

Czy dany układ jest układem Cramera?

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= [6 + 0 + 0] - [(-2) + 4 + 0] = 6 - 2 = 4$$

Mamy $\det A \neq 0$, więc układ $Ax = b$ jest układem Cramera.

Przykład cd.

Macierz A_1 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -3$$

Przykład cd.

Macierz A_2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

Przykład cd.

Macierz A_3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Przykład cd.

Po podstawieniu do wzorów Cramera:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{1}{4}$$

Uwaga. Te trzy liczby stanowią **JEDNO** rozwiązanie układu równań liniowych. Można je zapisać w postaci wektora:

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Przykład cd.

Sprawdzamy, czy zachodzi $Ax = b$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 0 \cdot 1\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ 0 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 \cdot 1\frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{4} \\ (-1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + (-1) \cdot 1\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zatem wektor $x^T = \left[-\frac{3}{4} \quad 1\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\right]$ jest poszukiwanym rozwiązaniem układu równań $Ax = b$.