Estymacja punktowa i przedziałowa

Zagadnienia

1. Statystyczny opis próby
2. Idea estymacji punktowej – pojęcie estymatora
3. Idea i pojęcia estymacji przedziałowej – przedział ufności, poziom ufności
4. Wzory na przedziały ufności dla wybranych parametrów

Przykład

Cel badania:

określić średnią masę jednej samicy szczura.

Zważono 160 samic.

Otrzymane wyniki (w gramach) zestawiono w tabeli.

191,2	193,5	190,0	195,3	197,1	199,5	189,8	197,1
193,0	194,5	197,7	193,1	194,2	200,5	193,5	185,3
195,1	196,2	195,8	196,9	200,6	189,0	191,6	201,5
184,3	186,9	195,1	198,0	202,2	203,5	195,3	200,1
197,6	191,5	188,6	192,2	194,6	188,8	193,3	196,8
200,8	192,1	195,6	199,8	193,8	189,9	197,0	187,0
194,2	190,8	193,9	196,3	198,1	194,2	199,6	196,5
198,7	205,8	198,9	190,8	193,8	193,0	194,3	195,4
189,5	198,4	199,5	197,7	189,3	197,8	192,5	194,7
200,2	197,0	199,9	191,0	189,8	188,3	193,7	193,3
196,7	196,9	200,2	197,3	201,8	189,4	206,3	191,6
202,7	193,2	193,2	191,6	189,7	194,2	188,1	193,2
189,6	193,2	199,5	193,2	194,7	193,7	193,6	197,2
197,1	196,0	196,7	194,6	198,1	198,0	199,9	189,2
200,2	191,3	191,0	191,9	191,1	193,1	195,4	192,3
194,6	197,0	193,4	199,4	198,3	201,4	198,5	201,7
195,5	199,4	190,1	200,7	201,6	190,0	196,2	194,1
196,7	197,3	194,6	195,6	198,6	197,8	197,3	193,4
194,8	197,2	196,1	192,6	202,4	192,7	200,7	189,1
194,3	190,7	196,5	194,6	197,6	192,1	190,9	198,8

Terminologia

Populacja generalna – wszystkie samice szczura wybranego gatunku

Badana cecha *X* – masa jednej samicy tego gatunku

Próba: $x_1, x_2, \ldots, x_{160}$

Liczebność pobranej próby n = 160

Opis statystyczny próby

Opis parametryczny

wyznaczenie parametrów próby, np.: średniej arytmetycznej, mediany, wariancji, odchylenia standardowego, itd.

Empiryczny rozkład wartości

prezentacja rozkładu wartości w próbie przy użyciu np.: szeregu rozdzielczego, histogramu

Parametry próby

Średnia arytmetyczna:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wariancja (nieobciążona):

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Parametry próby cd.

W przykładzie:

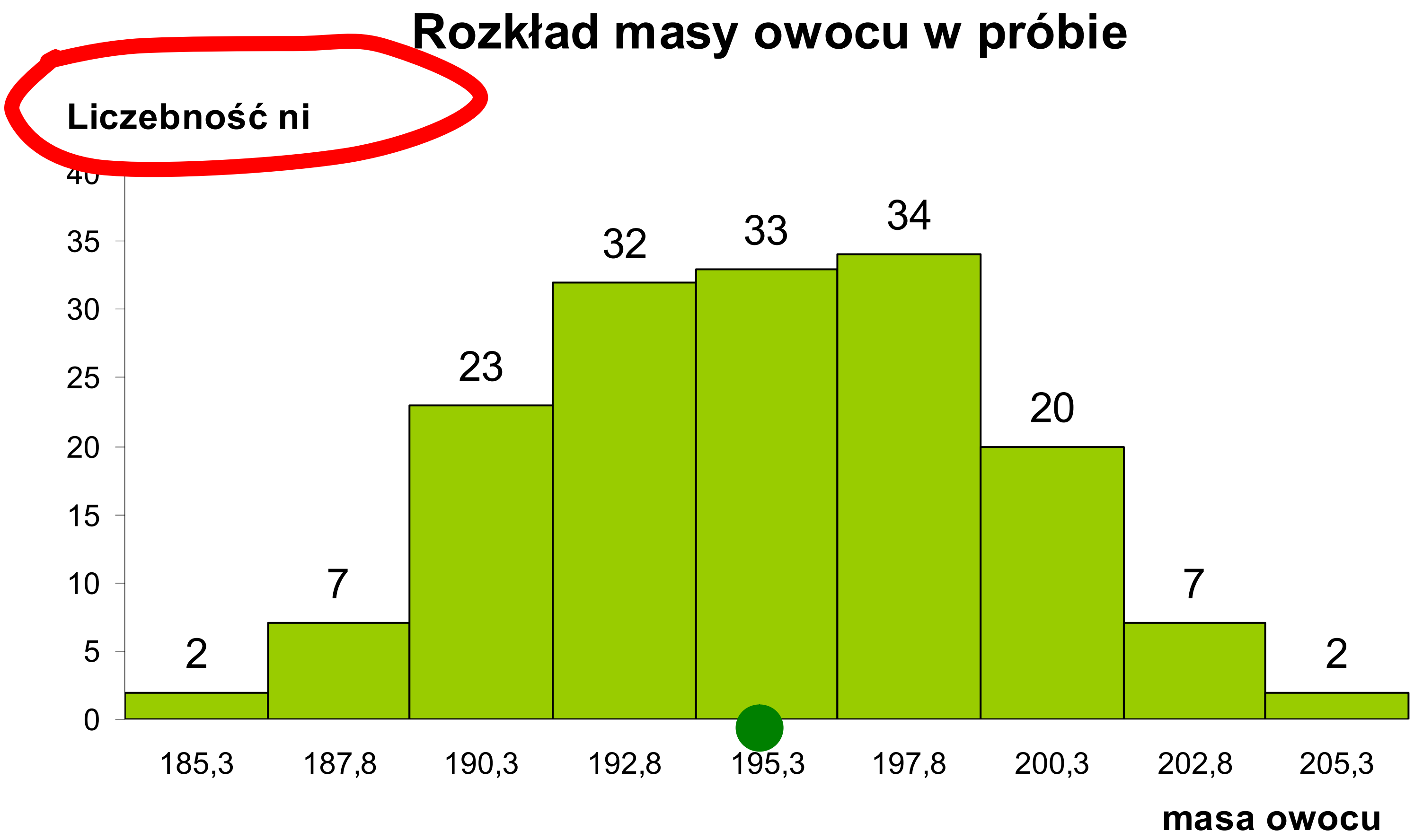
$$\overline{x} = 195,15\ g \qquad s^2 = 16,63\ g^2$$

Rozkład empiryczny w próbie

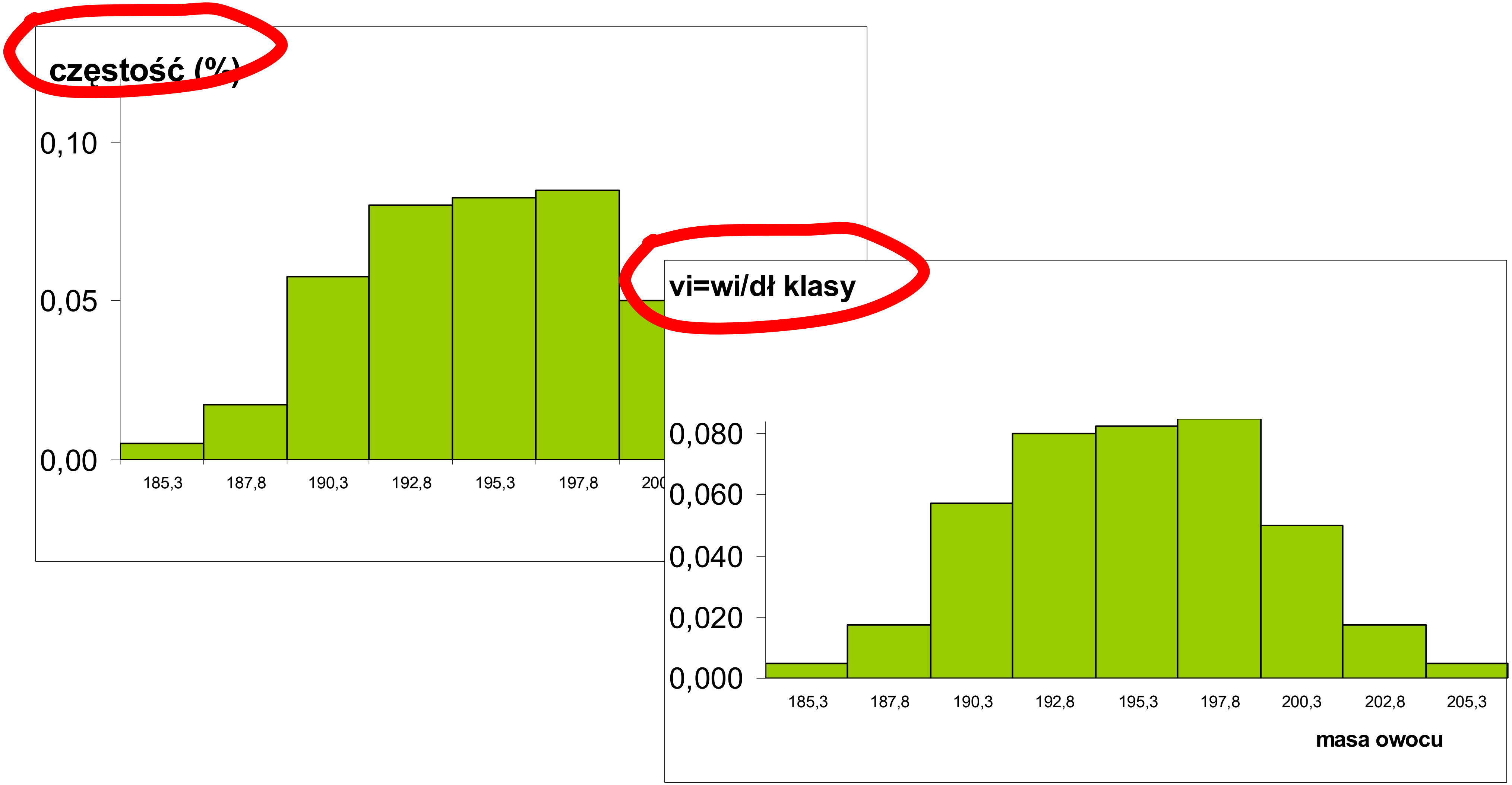
Granice przedziału	Liczebność n_i	Częstość $w_i=n_i/n$
<184,05; 186,55)	2	0,013
<186,55;189,05)	7	0,044
<189,05;191,55)	23	0,144
<191,55;194,05)	32	0,200
<194,05;196,55)	33	0,206
<196,55;199,05)	34	0,213
<199,05;201,55)	20	0,125
<201,55;204,05)	7	0,044
<204,05;206,55>	2	0,013
	160	1,000

Histogram liczebności dla próby

Empiryczny rozkład wartości w próbie



Histogramy – inne warianty



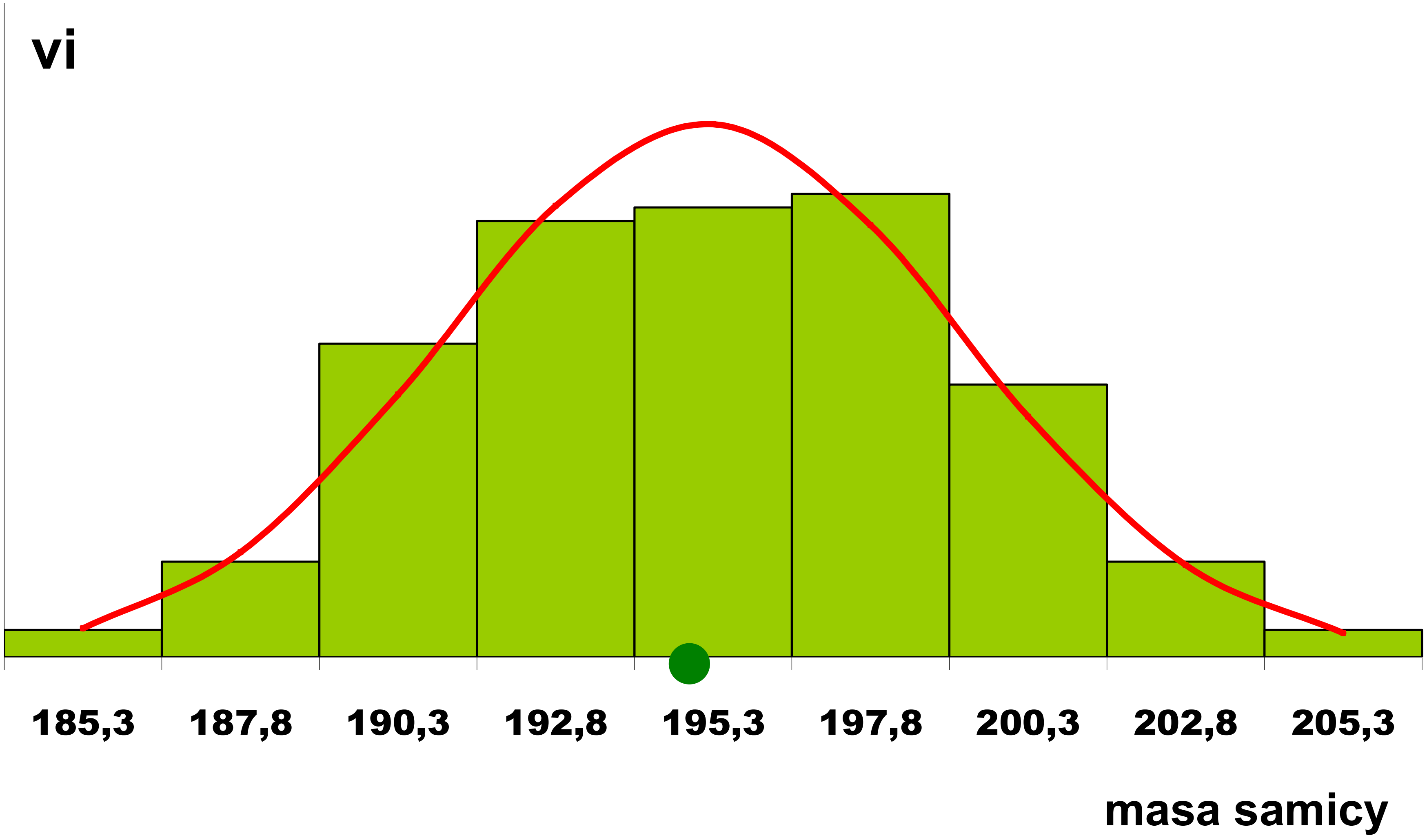
Komentarz

Problem

Jaka jest średnia masa jednej samicy tego gatunku?

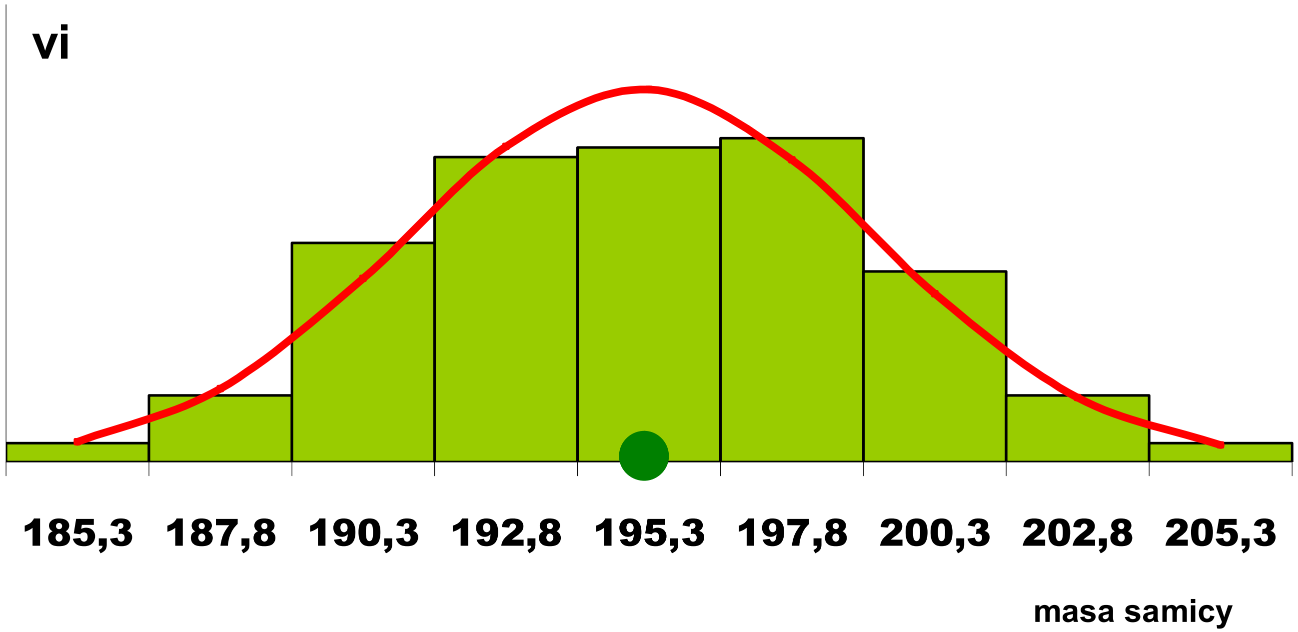
Na podstawie wyników pomiaru cechy otrzymanych dla próby będziemy charakteryzować wszystkie samice gatunku (całą populację generalną).

Średnia masa samicy tego gatunku



Komentarz

Średnia masa samicy



Zmienna losowa o rozkładzie normalnym jest modelem cechy *X* w populacji.

Cecha *X* ma rozkład normalny.
Masa jednej samicy ma rozkład normalny.

$N(\mu ; \sigma^2)$ - parametry nie muszą być znane

μ , σ^2 - nazywane są parametrami populacyjnymi (teoretycznymi)

Idea estymacji – przyjmujemy, że:

- <u>**średnia masa w populacji**</u> **samic wynosi μ; wartość μ jest nieznana, ale można ją szacować (estymować, oceniać) na podstawie danych z próby**
- <u>**wariancja masy w populacji**</u> **samic wynosi σ^2; wartość σ^2 jest nieznana, ale można ją estymować na podstawie danych z próby**
- <u>**odchylenie standardowe masy w populacji**</u> **samic wynosi σ; wartość σ jest nieznana, ale można ją estymować na podstawie danych z próby**

Rodzaje estymacji

- punktowa
- przedziałowa

Wzory podające oszacowania (oceny) parametrów rozkładów teoretycznych (μ, σ^2, σ i innych) nazywamy estymatorami punktowymi.

Oceną przedziałową nazywamy przedział liczbowy, w którym z dużym p-stwem zawarty jest parametr rozkładu teoretycznego (μ, σ^2, σ i inne).

Oznaczenie estymatora punktowego

Parametr	Estymator parametru
μ	$\hat{\mu}$
σ^2	$\hat{\sigma}^2$
σ	$\hat{\sigma}$

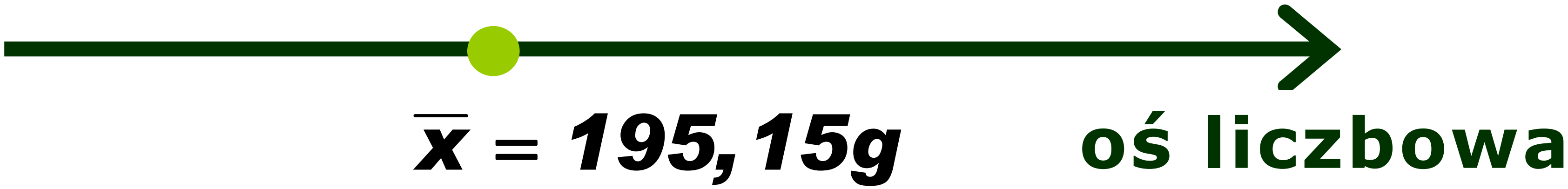
Wzory estymatorów punktowych

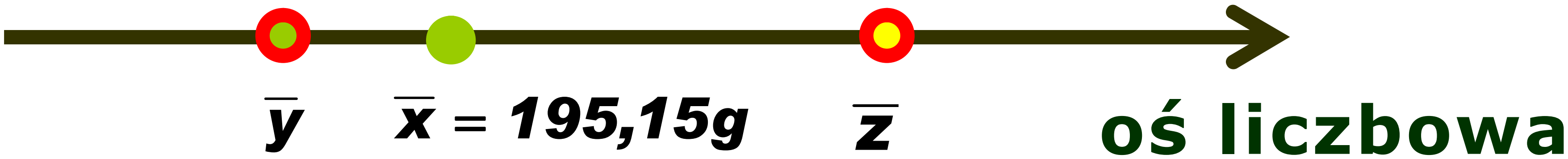
Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 – nieznane

Próba: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2, \quad \hat{\sigma} = s$$

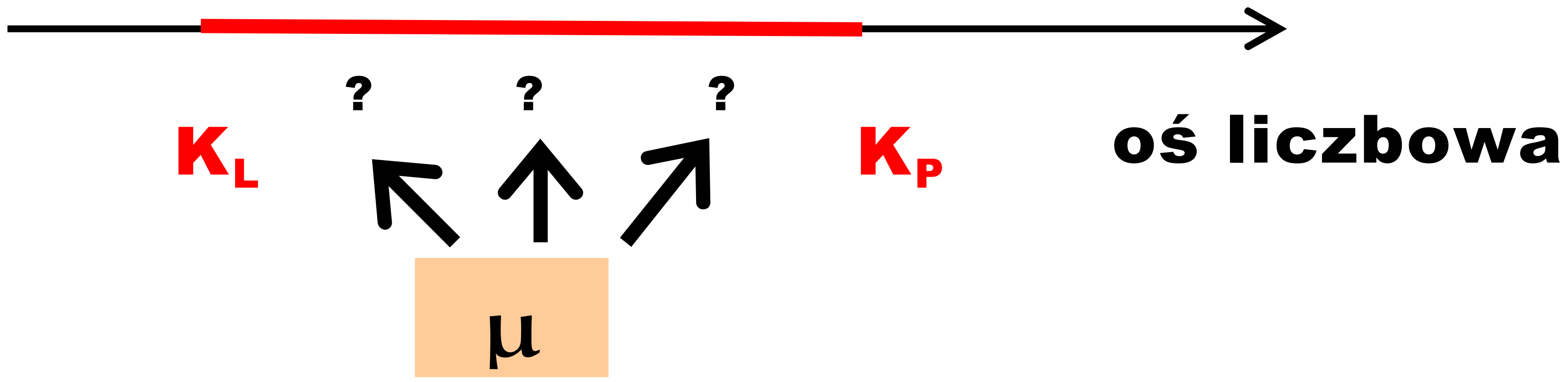
Estymacja punktowa - komentarz





Estymacja przedziałowa

Idea estymacji przedziałowej



$$\mu \in (K_L ; K_P)$$

Estymacja przedziałowa

Szukamy takiego przedziału:

$$\mu \in \left(K_L ; K_P\right)$$

który będzie spełniał warunek:

$$P\left\{\mu \in \left(K_L ; K_P\right)\right\}$$ **- duże**

Np.:

$$P\left\{\mu \in \left(K_L ; K_P\right)\right\} = 0{,}95$$

albo

$$P\left\{\mu \in \left(K_L ; K_P\right)\right\} = 0{,}99$$

Estymacja przedziałowa cd.

Ogólnie:

$$P\{\mu \in (K_L; K_P)\} = 1 - \alpha$$

gdzie:

$1 - \alpha$ **duże (np. równe 0,95 albo 0,99)**

α **małe (np. równe 0,05 albo 0,01)**

Estymacja przedziałowa - terminologia

$$P\{\mu \in (K_L; K_P)\} = 1 - \alpha$$

α **poziom istotności**

$1 - \alpha$ **poziom ufności**

$(K_L; K_P)$ **przedział ufności dla estymowanego parametru przy poziomie ufności $1 - \alpha$**

Estymacja przedziałowa – terminologia

$$P\left\{ \mu \in \left(K_L ; K_P \right) \right\} = 1 - \alpha$$

Np. dla α = 0,05 mówimy:

przedział ufności dla średniej μ przy poziomie ufności 95% albo 95% przedział ufności dla średniej μ.

Np. dla α = 0,01 mówimy:

przedział ufności dla średniej μ przy poziomie ufności 99% albo 99% przedział ufności dla średniej μ.

Przedział ufności dla średniej μ

Cecha *X* ma w populacji rozkład normalny,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 – nieznane;

- **Losujemy próbę: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; np.: $n=10$**

191,2 193,0 195,1 184,3 197,6
200,8 194,2 198,7 189,5 200,2

- **Obliczamy parametry próby:**

$\bar{x} = 194{,}46\ g$, $s^2 = 26{,}89\ g^2$, $s = 5{,}19\ g$,

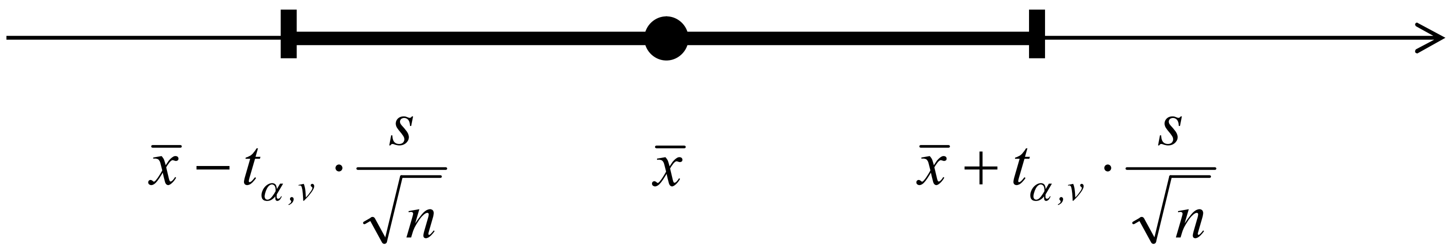
- **Wyznaczamy końce przedziału ufności ze wzoru:**

Przedział ufności dla średniej μ cd.

Przedział ufności dla μ

przy poziomie ufności *P*=1-α:

$$\mu \in \left(\bar{x} - t_{\alpha,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{\alpha,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$



wartość krytyczna t $_{\alpha,\, v,}$

v **– liczba stopni swobody,** $v = n$**-1**

Tablica wartości krytycznych rozkładu t-Studenta

$X \sim t_v$ - X zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z liczbą stopni swobody v,
α - poziom istotności,
$t_{\alpha,v}$ - wartość krytyczna - liczba taka, że $P(|X| > t_{\alpha,v}) = \alpha$

v \ α	**0,400**	**0,300**	**0,200**	**0,100**	**0,050**	**0,025**	**0,025**	**0,010**	**0,005**	**0,001**
1	1,3764	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	25,4519	25,4519	63,6559	127,3211	636,5776
2	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,2054	6,2054	9,9250	14,0892	31,5998
3	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	4,1765	5,8408	7,4532	12,9244
:										
8	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	2,7515	3,3554	3,8325	5,0414
9	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	**2,2622**	2,6850	2,6850	3,2498	3,6896	4,7809
10	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,6338	3,1693	3,5814	4,5868
11	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	2,5931	3,1058	3,4966	4,4369
:										
85	0,8459	1,0428	1,2916	1,6630	1,9883	2,2818	2,2818	2,6349	2,8822	3,4086
90	0,8456	1,0424	1,2910	1,6620	1,9867	2,2795	2,2795	2,6316	2,8779	3,4019
95	0,8454	1,0421	1,2905	1,6611	1,9852	2,2775	2,2775	2,6286	2,8741	3,3958
100	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,2757	2,2757	2,6259	2,8707	3,3905

Przykład

Wyznaczymy 95% przedział ufności dla średniej μ na podstawie wylosowanej próby (poziom ufności P = 95% = 0,95).

Z tablic wartości krytycznych rozkładu t-Studenta odczytujemy

$t_{\alpha, v}$ dla α = 0,05, v = 9; $t_{0,05,\,9}$ = 2,2622.

Podstawiamy do wzoru:

$$\overline{x} - t_{\alpha,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 194{,}46 - 2{,}2622 \cdot \frac{5{,}19}{\sqrt{10}} = 190{,}75$$

$$\overline{x} + t_{\alpha,v} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 194{,}46 + 2{,}2622 \cdot \frac{5{,}19}{\sqrt{10}} = 198{,}17$$

Przykład cd.

Odp.: 95% przedziałem ufności dla średniej μ jest

$$\left(190{,}75\,;198{,}17\right).$$

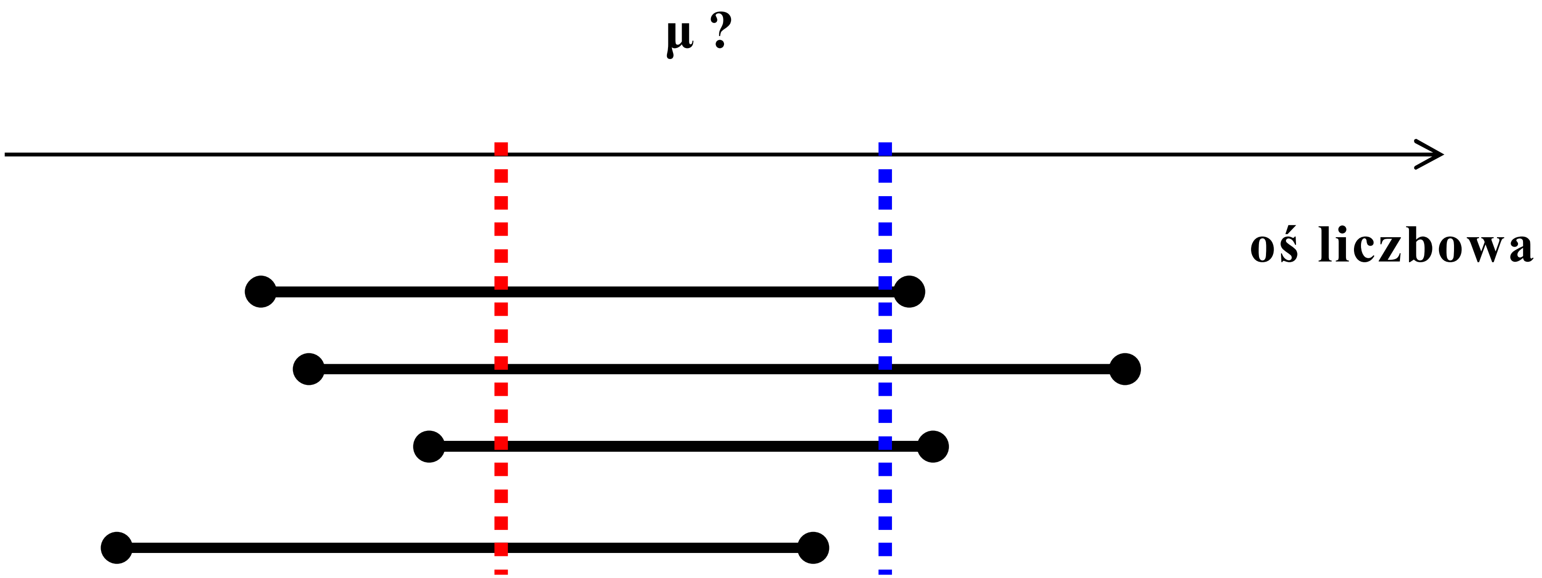
Średnia μ przy poziomie ufności P=0,95 (z pstwem 0,95) należy do tego przedziału.

Interpretacja poziomu ufności

Druga próba wylosowana z tej samej populacji:
198,7; 189,5; 200,2; 196,7; 202,7; 189,6; 197,1; 200,2; 194,6; 195,5

95% przedział ufności dla średniej μ:

$$\left(193{,}35\,;\,199{,}61\right)$$



Precyzja oceny parametru

Wyniki pomiarów masy:

191,2; 193,0; 195,1; 184,3; 197,6; 200,8; 194,2; 198,7; 189,5; 200,2

Parametry próby: *n* = 10,

$\overline{x} = 194{,}46\ g$, $s^2 = 26{,}89\ g^2$, s **= 5,19 *g*.**

$t_{0,05,\ 9}$ **= 2,2622.**

95% przedziałem ufności dla średniej *μ* jest $\left(190{,}75\ ;\ 198{,}17\right)$**.**

$t_{0,01,\ 9}$ **= 3,2498;**

99% przedziałem ufności dla średniej *μ* jest $\left(189{,}13\ ;\ 199{,}79\right)$**.**

Przedział ufności dla wariancji σ^2

Cecha X ma w populacji rozkład normalny,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 – nieznane;

Losujemy próbę: $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

np.:

191,2; 193,0; 195,1; 184,3; 197,6; 200,8;
194,2; 198,7; 189,5; 200,2

Obliczamy parametry próby: $s^2 = 26{,}89\ g^2$ **,**

Podstawiamy do wzoru:

Przedział ufności dla wariancji σ^2

Przedział ufności dla σ^2 przy poziomie ufności P=1-α

$$\sigma^2 \in \left(\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,\,v}} ; \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,v}} \right)$$

χ^2 -wartość krytyczna rozkładu chi-kwadrat,

v – liczba stopni swobody, $v = n - 1$

Tablica wartości krytycznych rozkładu chi-kwadrat

$X \sim \chi^2_v$ - X zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z liczbą stopni swobody *v*, α - poziom istotności,
$\chi^2_{\alpha, v}$ - wartość krytyczna - liczba taka, że $P(X > \chi^2_{\alpha, v}) = \alpha$

v \ *α*	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	$0{,}0^4393$	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	7,8794
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2104	10,5965
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	12,8381
:										
8	1,3444	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9549
9	1,7349	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893
10	2,1558	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1881
11	2,6032	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6752	21,9200	24,7250	26,7569
:										
85	55,1695	57,6339	61,3888	64,7494	68,7771	102,0789	107,5217	112,3933	118,2356	122,3244
90	59,1963	61,7540	65,6466	69,1260	73,2911	107,5650	113,1452	118,1359	124,1162	128,2987
95	63,2495	65,8983	69,9249	73,5198	77,8184	113,0377	118,7516	123,8580	129,9725	134,2466
100	67,3275	70,0650	74,2219	77,9294	82,3581	118,4980	124,3421	129,5613	135,8069	140,1697

Przykład

Wyznaczymy 95% przedział ufności dla wariancji σ^2 na podstawie wylosowanej próby.

Odczytujemy wartości krytyczne rozkładu chi-kwadrat z tablic:

$\chi^2_{\alpha/2,\, v}$ **- dla** α**=0,05,** v**=9;** $\chi^2_{0,025,\, 9}$**=19,0228,**

$\chi^2_{1-\alpha/2,\, v}$ **- dla** α**=0,05,** v**=9;** $\chi^2_{0,975,\, 9}$**=2,7004.**

Przykład – wyniki cd.

Podstawiamy do wzoru:

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,v}} = \frac{26{,}89\cdot 9}{19{,}0228} = 12{,}72$$

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,v}} = \frac{26{,}89\cdot 9}{2{,}7004} = 89{,}62$$

Odp.: 95% przedziałem ufności dla wariancji σ^2 jest $(12{,}72\,;\,89{,}62)$**.**

Wariancja σ^2 przy poziomie ufności P=0,95 (z p-stwem 0,95) należy do tego przedziału.

Przedział ufności dla odch. std. σ

Cecha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 – nieznane

Próba: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Przedział ufności dla σ przy poziomie ufności $P=1-\alpha$

$$\sigma \in \left(\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,\,v}}};\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,v}}} \right)$$

Przedział ufności dla odch. std. σ

Wyznaczamy pierwiastki:

$$\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,\,v}}} = \sqrt{0{,}0193} = 0{,}14$$

$$\sqrt{\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,v}}} = \sqrt{0{,}8341} = 0{,}91$$

Odp.: 95% przedziałem ufności dla odchylenia standardowego σ jest $(0{,}14\,;0{,}91)$

Odchylenie standardowe należy do niego z p-stwem 0,95.