Rozkład normalny

Rozkład zmiennej losowej ciągłej

Rozkład zmiennej losowej *X* ciągłej można przedstawić za pomocą:

funkcji gęstości p-stwa (fgp)

$$y = f(x)$$

funkcji dystrybuanty:

$$F_X(t) \overset{def}{=} P(X \leq t)$$

Rozkład normalny

Wzór funkcji gęstości:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R$$

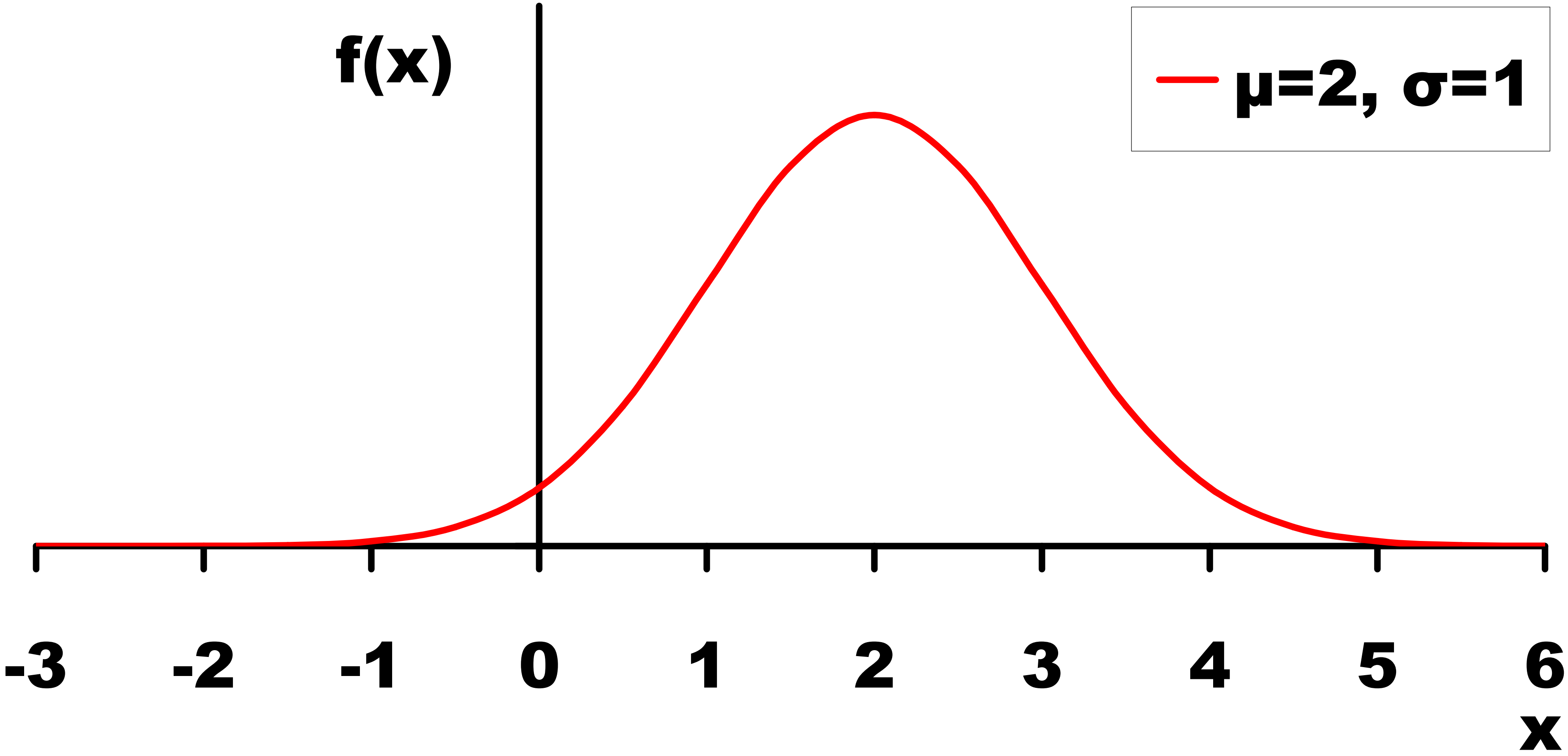
Parametry w rozkładzie normalnym:

μ (czyt.: mi)

σ (czyt.: sigma)

$$\mu \in R \qquad\qquad \sigma > 0$$

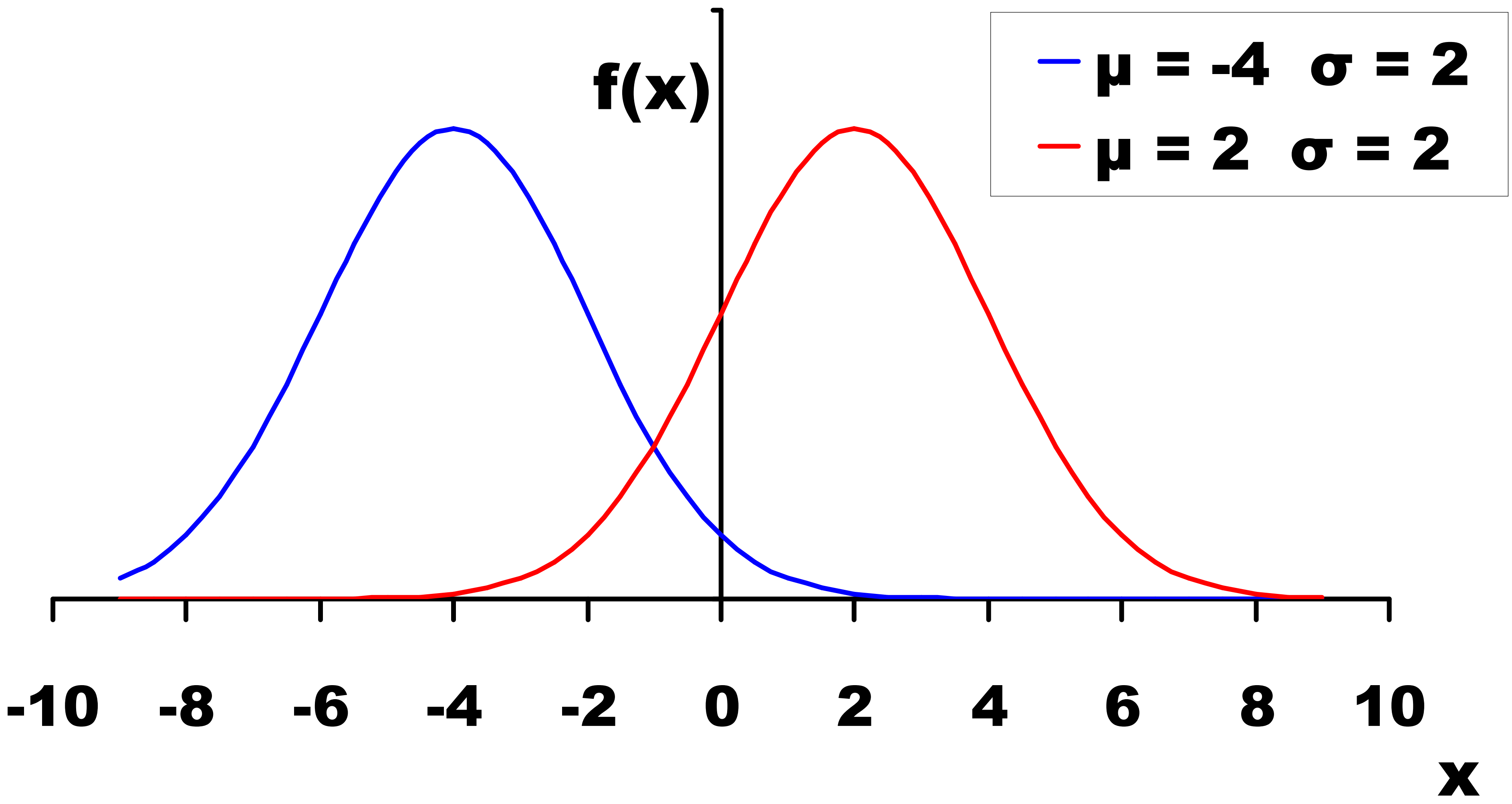
Rozkład normalny – wykres fgp



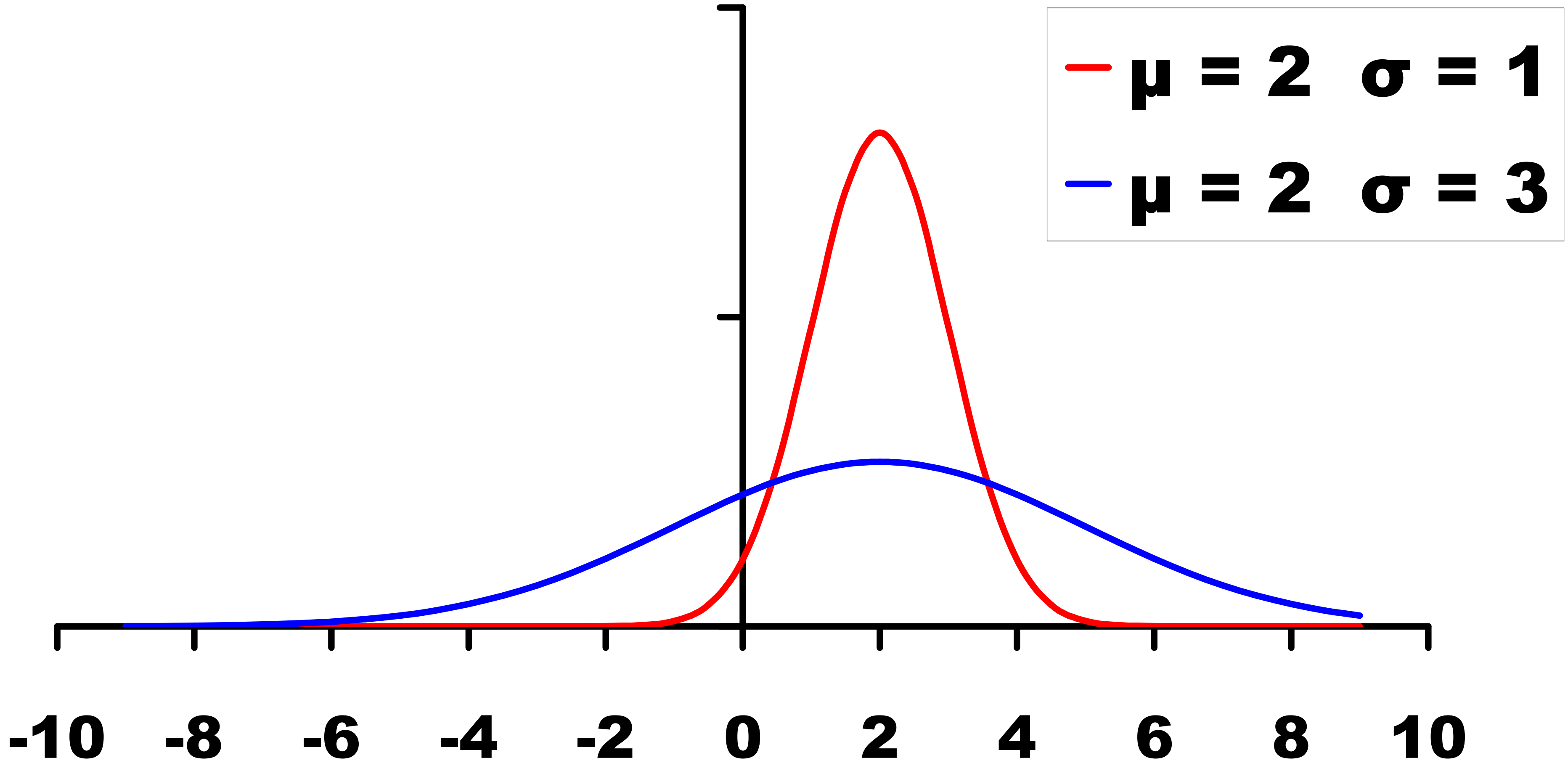
krzywa Gaussa

Własności matematyczne.

Parametr μ



Parametr σ



Oznaczenia

Wyrażenie:

zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ oraz σ^2

zapisujemy:

$$X \sim N\,(\,\mu,\ \sigma^{2})$$

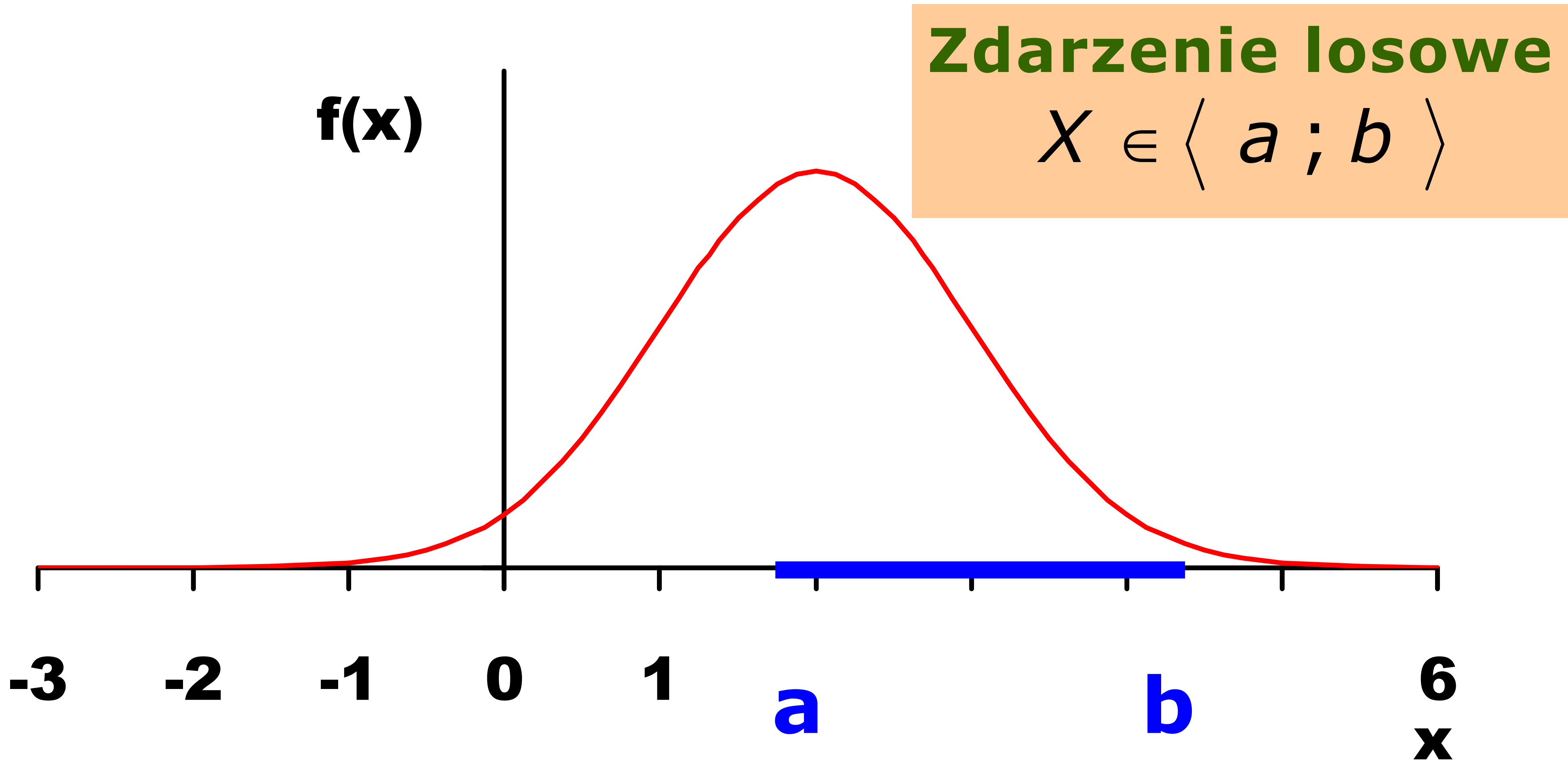
<u>Definicja.</u> Mówimy, że zmienna losowa Z ma rozkład normalny standardowy, jeśli $\mu = 0,\ \sigma = 1$.

Zapisujemy:

$$Z \sim N\,(\,0,\ 1)$$

Zdarzenie losowe

Wykres fgp $y = f\ (x)$



Zdarzenia losowe - przykłady

Przykłady (przy a < b):

$$X \in (a , b)$$

$$X \in \langle a , b \rangle$$

$$X \in \langle a , b)$$

$$X \in (a , b \rangle$$

$$X \in (-\infty , a \rangle$$

$$X \in (-\infty , a)$$

$$X \in (a , +\infty)$$

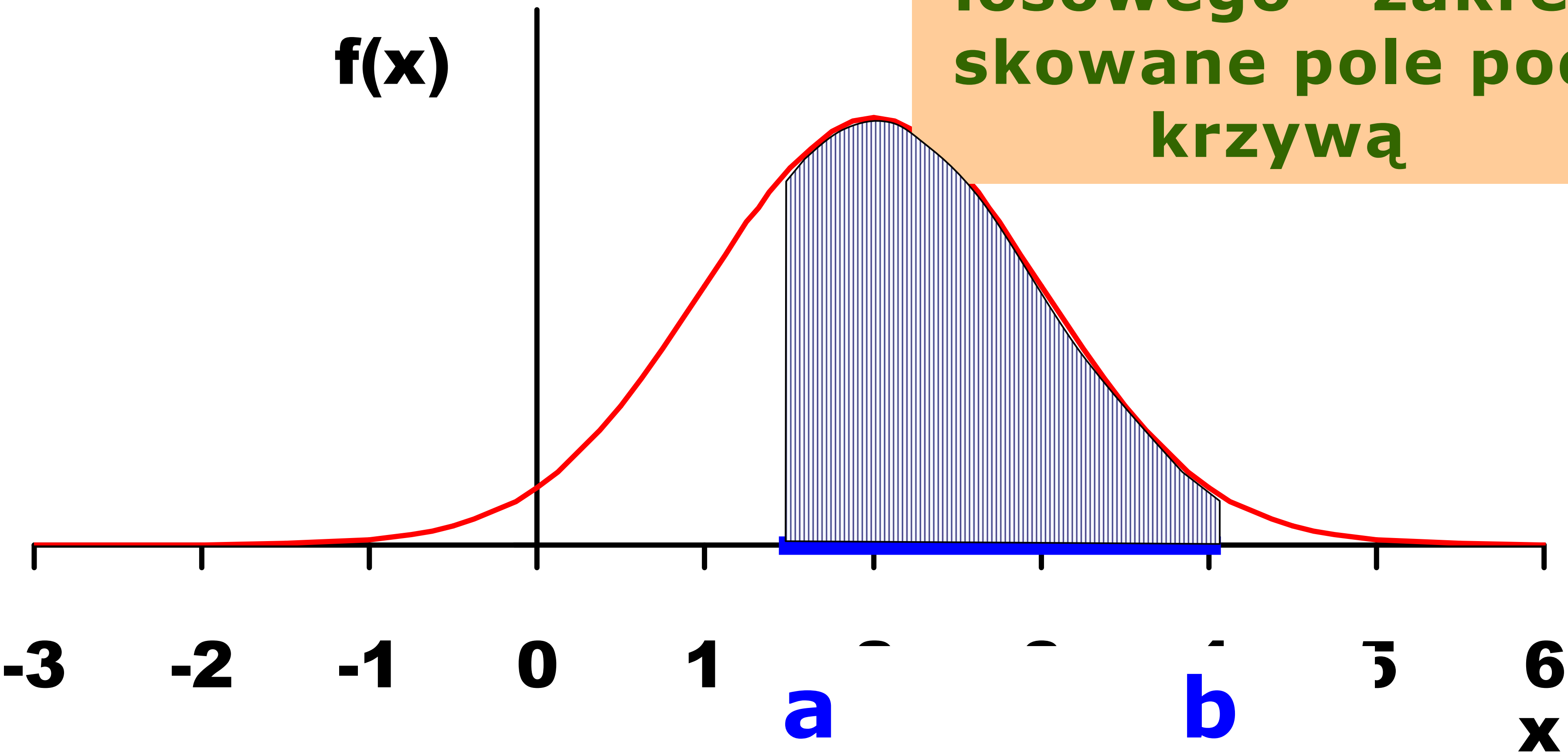
$$X \in \langle a , +\infty)$$

$$X \in \langle a , a \rangle = \{ a \}$$

P-stwo zdarzenia losowego

Wykres fgp $y = f\ (x)$

P-stwo zdarzenia losowego - zakre-skowane pole pod krzywą



P-stwo zdarzenia losowego

P-stwo zdarzenia losowego:

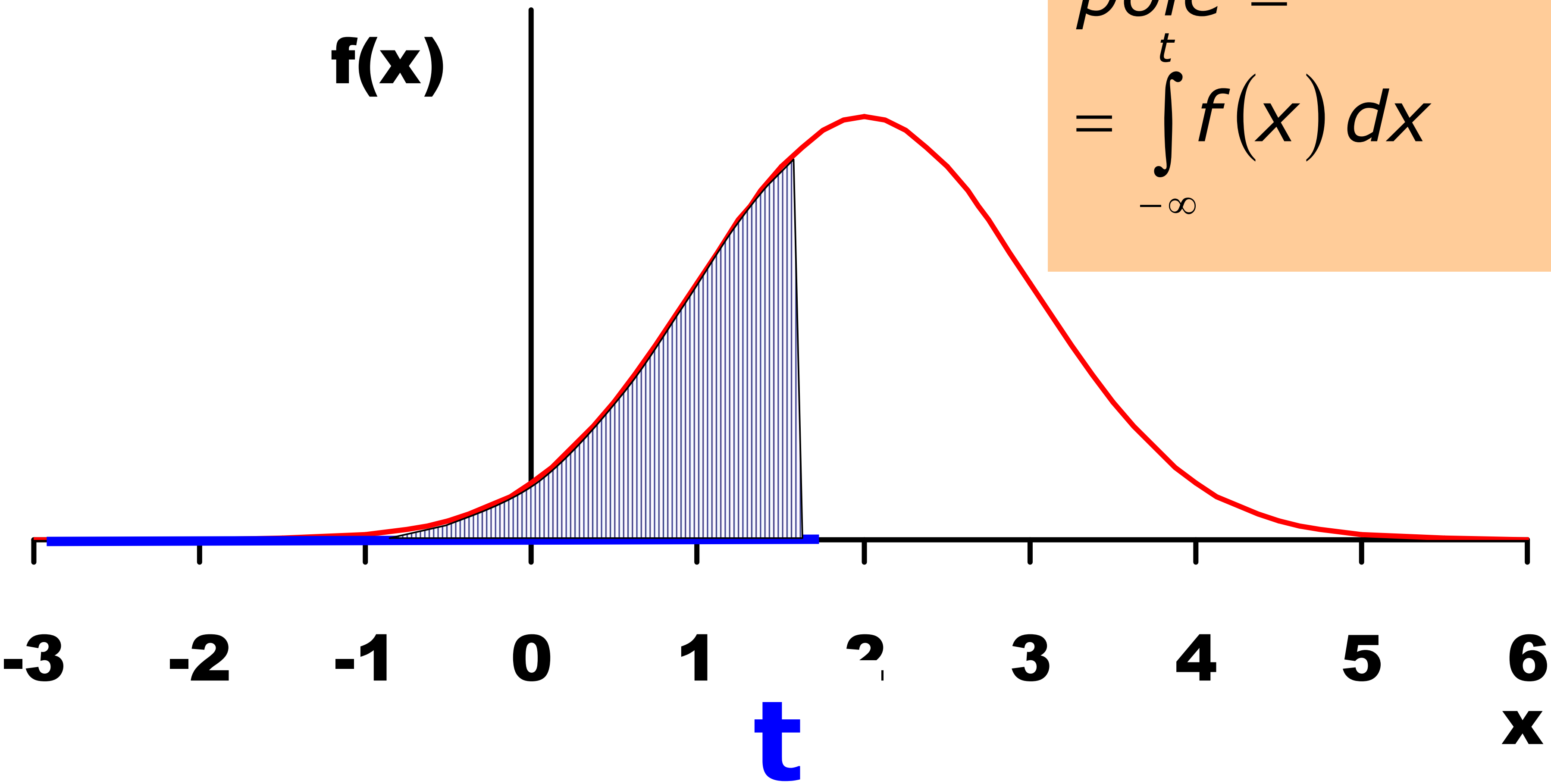
$$P\{X \in \langle a, b \rangle\} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*, ozn.: *F_X (t)*

$$P\{X \in \langle a, b \rangle\} = F_X(b) - F_X(a)$$

Dystrybuanta na wykresie fgp

Wykres fgp $y = f(x)$



zakreskowane pole $=$

$$= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Tablice statystyczne

Tablica dystrybuanty $F_Z(x)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
:										
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

Zadania.

Prawo trzech sigm

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, to:

$$P\left\{ X \in \langle \mu - \sigma \,;\, \mu + \sigma \rangle \right\} \approx 0{,}68$$

$$P\left\{ X \in \langle \mu - 2\sigma \,;\, \mu + 2\sigma \rangle \right\} \approx 0{,}95$$

$$P\left\{ X \in \langle \mu - 3\sigma \,;\, \mu + 3\sigma \rangle \right\} \approx 0{,}9973$$

Rysunek na tablicy.

Charakterystyki rozkładu

Nazwy i oznaczenia:

średnia $EX = \mu$

wariancja $D^2X = \sigma^2$

odchylenie standardowe $\sqrt{D^2X} = \sigma$

Rozkład chi – kwadrat

Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są:

- **niezależne**
- $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

to

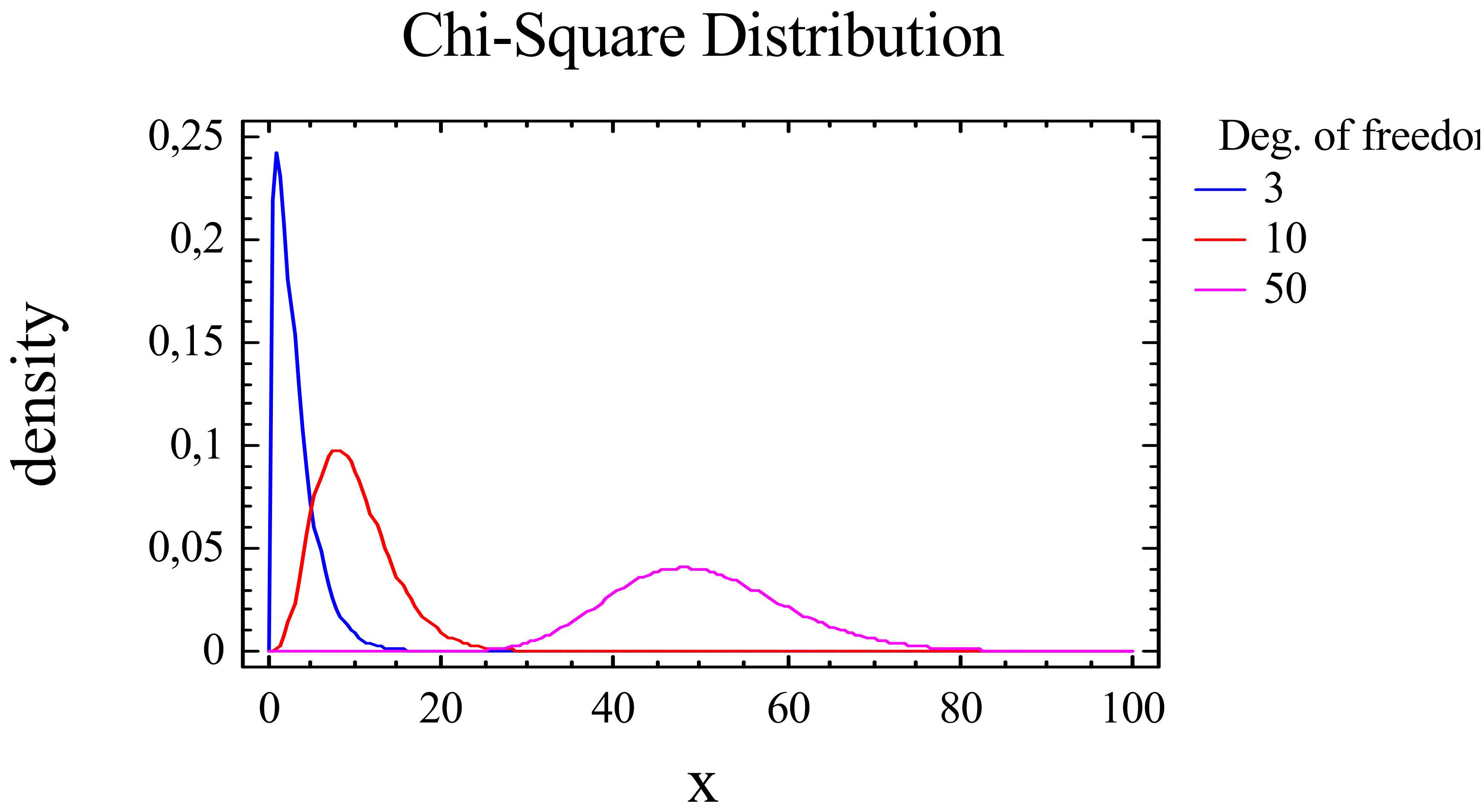
$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

jest zmienną losową o rozkładzie χ^2 z liczbą stopni swobody n.

Ozn. χ^2 czytamy: chi-kwadrat

* Rozkład chi – kwadrat cd.

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu χ^2:



* Rozkład t-Studenta

Jeśli zmienne losowe $X_0, X_1, \ldots, X_n$ są:

- **niezależne**
- **$X_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \ldots, n$**

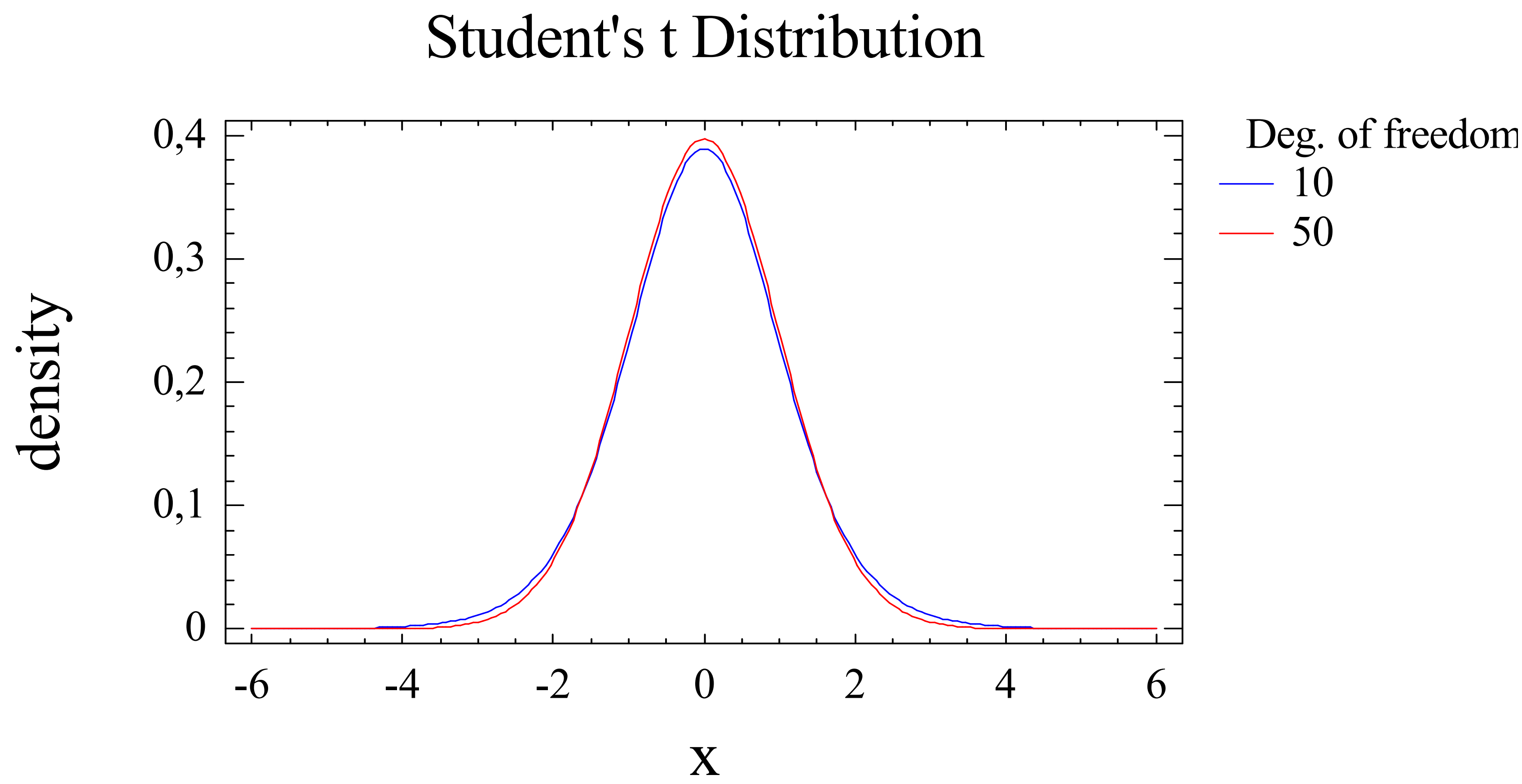
to

$$\frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2\right)}}$$

jest zmienną losową o rozkładzie *t*-Studenta z liczbą stopni swobody *n*.

* Rozkład t-Studenta cd.

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu *t*-Studenta:



* Rozkład *F* Fishera – Snedecora

Jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ oraz $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ są:

- **niezależne**
- **$X_i, Y_j \sim N(0, 1)$**

to

$$\frac{\frac{1}{n}\left(X_1^{\,2} + X_2^{\,2} + \ldots + X_n^{\,2}\right)}{\frac{1}{m}\left(Y_1^{\,2} + Y_2^{\,2} + \ldots + Y_m^{\,2}\right)}$$

jest zmienną losową o rozkładzie *F* Fishera – Snedecora z liczbami stopni swobody *n* i *m*.

* Rozkład *F* Fishera – Snedecora

Wykres funkcji gęstości dla rozkładu *F*